

فصل ۳

چند ضلعی ها و تقارن



هدف کلی

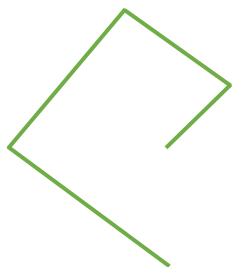
آشنایی با شکل های هندسی، چند ضلعی ها و رابطه بین آن ها

انتظارات از دانش آموزان در این درس:

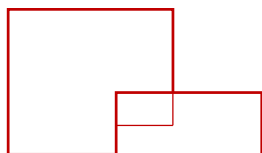
- ۱ درک مفهوم چند ضلعی و شناخت مفهوم انواع آن
- ۲ یادگیری تعریف مرکز تقارن و محور تقارن
- ۳ شناخت خطوط موازی و عمود بر هم و قوانین مربوط به آن ها
- ۴ آشنایی با تعاریف متوازی الاضلاع، لوزی، مستطیل، مربع و دوزنقه
- ۵ پیدا کردن زاویه های داخلی یا زاویه های خارجی یک چند ضلعی

چند ضلعی:

هر خط شکسته بسته به طوری که ضلع ها به جز در رأس ها یکدیگر را قطع نکنند چند ضلعی نام دارد.



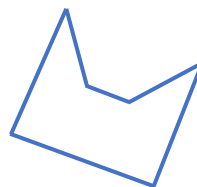
چند ضلعی نیست



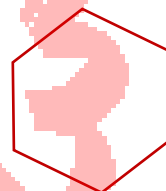
چند ضلعی نیست



چند ضلعی است



چند ضلعی است



چند ضلعی است

قطرهای یک چند ضلعی:

هر پاره خط که دو رأس غیر مجاور یک چند ضلعی را به هم وصل کند قطر چند ضلعی نام دارد و تعداد قطرهای یک چند ضلعی را از رابطه زیر به دست می آید. (n تعداد ضلع است).

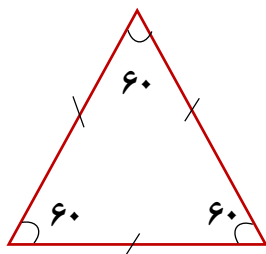
$$\frac{n \times (n - 3)}{2}$$

مثال: تعداد قطرهای یک هفت ضلعی چند تا است ؟

$$n=7 \text{ تعداد اضلاع} \rightarrow \text{تعداد قطرها} = \frac{7 \times (7-3)}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

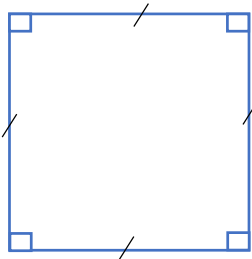
چند ضلعی منتظم :

هر چند ضلعی که تمام ضلع هایش با هم و تمام زاویه هایش با هم مساوی باشند چند ضلعی منتظم نام دارد.

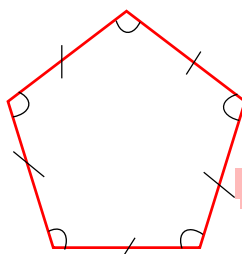


مثلث متساوی الاضلاع

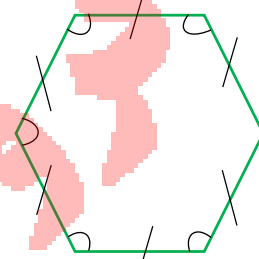
۳ ضلعی منتظم



۴ ضلعی منتظم



۵ ضلعی منتظم



۶ ضلعی منتظم

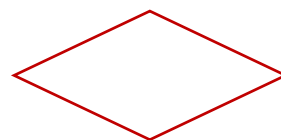
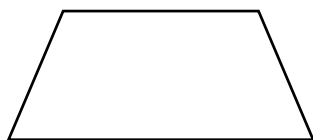
نکته: سه ضلعی منتظم همان مثلث متساوی الاضلاع و مربع همان چهار ضلعی منتظم می باشد.

نکته: اگر یک چند ضلعی فقط ضلع ها یا فقط زاویه هایش برابر باشد منتظم نیست.

چند ضلعی محدب :

هر چند ضلعی که همه ی زاویه های داخلی اش کمتر از 180° درجه باشند چند ضلعی محدب یا کوژ نام دارد.

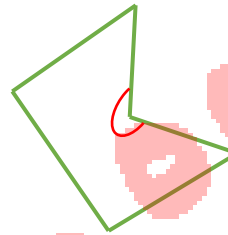
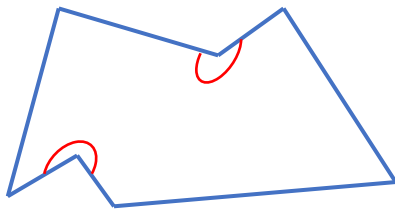
مثال:



نکته: همه چند ضلعی های منتظم محدب هستند.

چند ضلعی مقعر:

هر چند ضلعی که حداقل یک زاویه داخلی اش بیشتر از 180° درجه داشته باشد چند ضلعی مقعر یا کاو نام دارد.



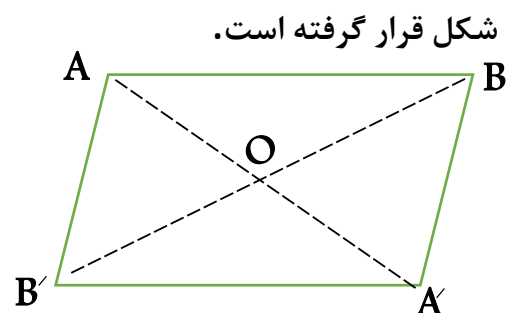
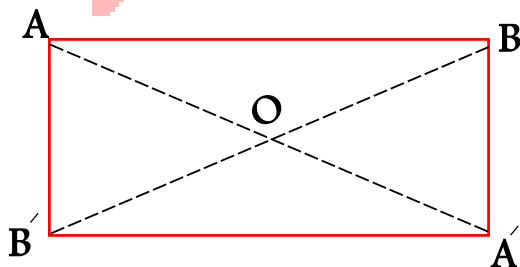
نکته: چند ضلعی منتظم مقعر وجود ندارد.

نکته: سه ضلعی مقعر یا مثلثی که مقعر باشد وجود ندارد و همه مثلث ها محدب هستند.

مرکز تقارن:

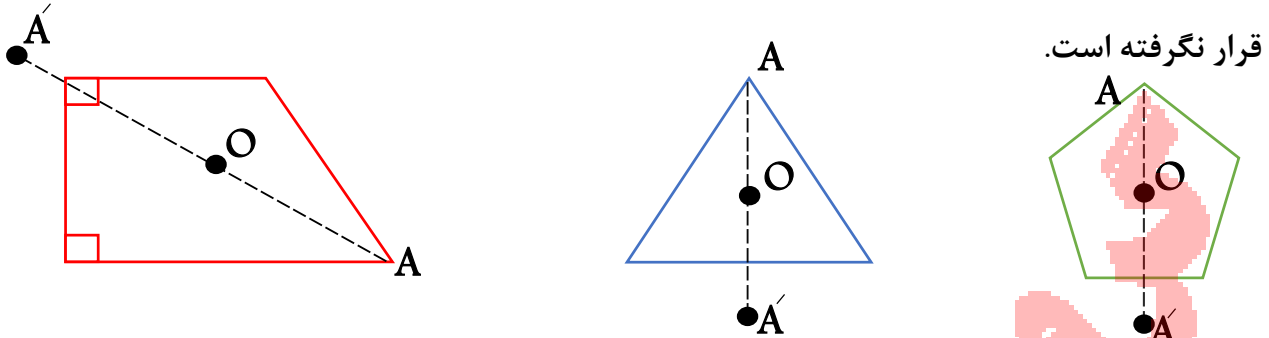
مرکز تقارن نقطه ای درون شکل است که اگر هر نقطه از شکل را به آن وصل کنیم و به همان اندازه در همان راستا ادامه دهیم فقط روی شکل قرار گیرد به عبارتی قرینه هر نقطه شکل نسبت به آن نقطه (مرکز تقارن) روی خودش شکل قرار می گیرد.

مثال: در دو شکل زیر نقطه O مرکز تقارن شکل است زیرا قرینه نقاط A و B نسبت به O روی



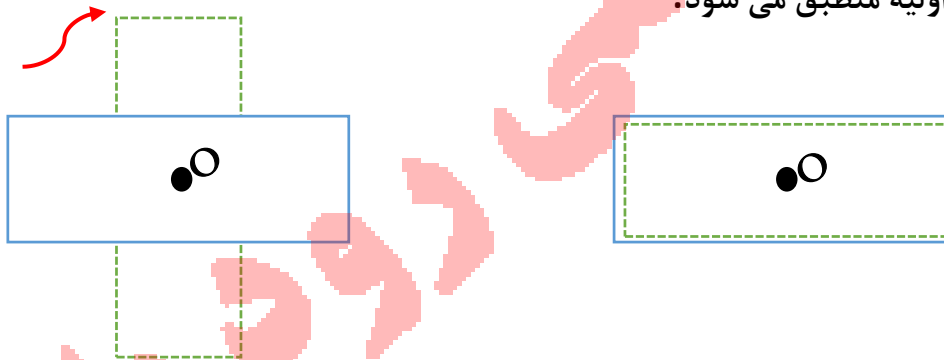
شکل قرار گرفته است.

مثال: در شکل‌های زیر نقطه O مرکز تقارن نیست زیرا قرینه نقطه A نسبت به نقطه O روی خودش



* به عبارت دیگر مرکز تقارن شکل، نقطه‌ای در این شکل است که اگر شکل را حول آن نقطه 180° درجه دوران دهیم بر خود منطبق شود.

مثال: نقطه O در شکل مقابل مرکز تقارن است زیرا اگر مستطیل را 180° درجه حول نقطه O دوران دهیم بر شکل اولیه منطبق می‌شود.



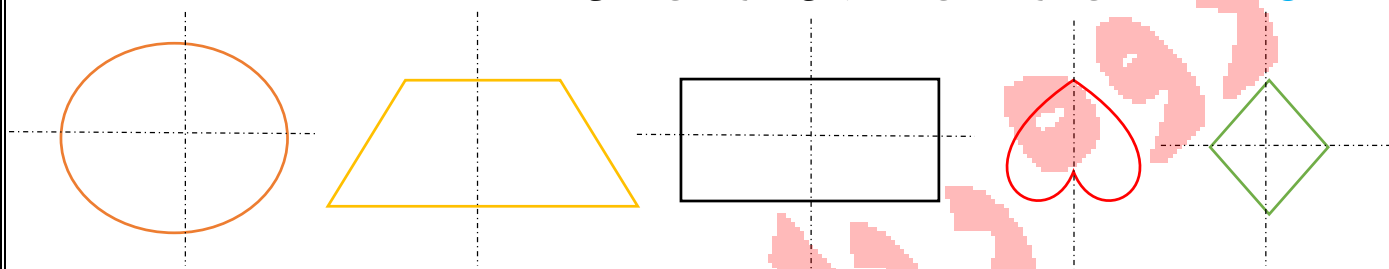
نکته: در چند ضلعی‌های منتظم اگر تعداد ضلع‌ها زوج باشد مرکز تقارن دارند ولی اگر تعداد ضلع‌ها فرد باشد مرکز تقارن ندارند.

مثال: مثلث متساوی‌الاضلاع و پنج ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارند ولی مربع و شش ضلعی منتظم و ده ضلعی منتظم مرکز تقارن دارند.

محور تقارن:

خطی است که شکل را به دو قسمت قرینه طوری تقسیم می کند که اگر شکل را از روی آن خط تا کنیم دو قسمت شکل بر هم منطبق می شوند.

مثال: در شکل های زیر خطهای نقطه چین محورهای تقارن شکل ها هستند.

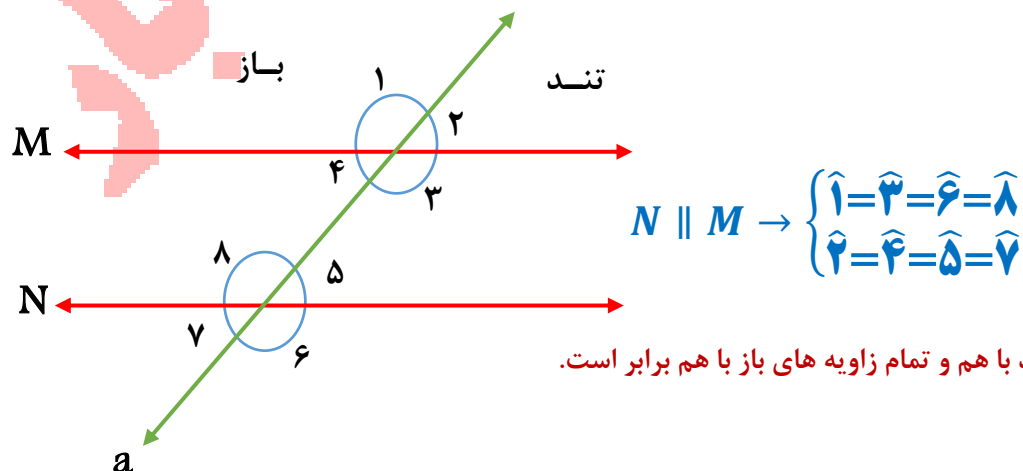


نکته: هر چند ضلعی منتظم به تعداد ضلع هایش محور تقارن دارد.

مثال: سه ضلعی منتظم سه محور تقارن و شش ضلعی منتظم ۶ محور تقارن دارد.

توازی:

اگر خطی مانند a دو خط m و n را قطع کند و روی آنها زاویه های مساوی بسازد می گوییم دو خط m و n موازی هستند.



تمام زاویه های تند با هم و تمام زاویه های باز با هم برابر است.

سوال: در شکل چرا زاویه ۲ و ۴ با هم برابرند؟

نکته: موازی بودن دو خط m و n را به صورت (علامت موازی بودن) $m \parallel n$ نشان می‌دهیم و اگر m و n

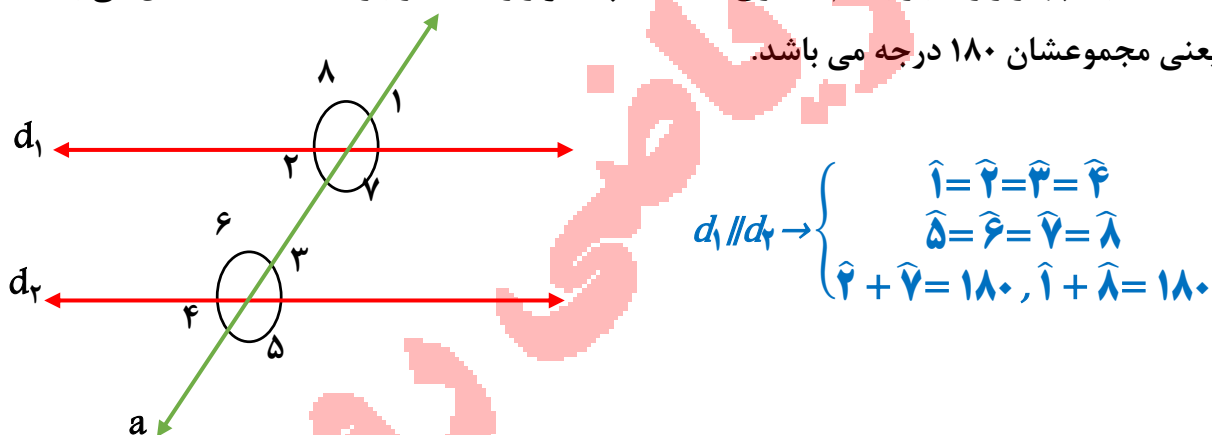
موازی نباشند (یا متقاطع باشند) می‌نویسیم $m \nparallel n$ (علامت موازی نبودن)

نکته: در شکل بالا به خط a خط مورب (خط کج) گفته می‌شود.

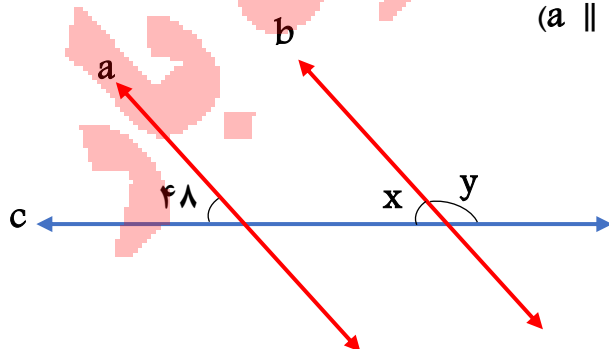
نکته: اگر دو خط موازی را خط موربی قطع کند نتیجه می‌گیریم: الف) چهار زاویه تند با هم مساوی

هستند ب) چهار زاویه باز با هم مساوی هستند پ) هر زاویه تند و باز ایجاد شده مکمل می‌باشند

یعنی مجموعشان 180° درجه می‌باشد.



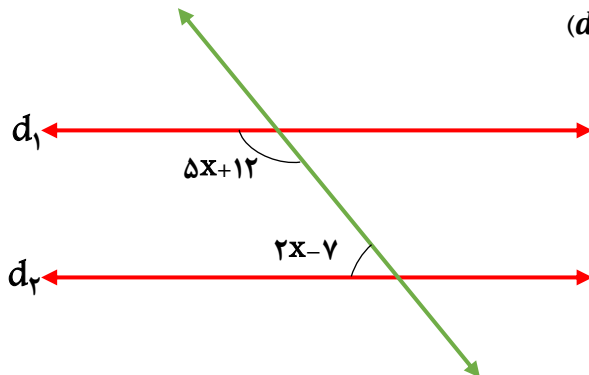
مثال: در شکل زیر مقادیر x و y را پیدا کنید. ($a \parallel b$)



پاسخ: در این شکل همه زاویه های تند با هم برابرند پس $x = 48$ و همینطور مجموع هر زاویه تند و

باز 180° درجه می‌باشد پس $y = 180 - 48 = 132$

مثال: در شکل مقابل مقدار x چقدر است ؟ $(d_1 \parallel d_2)$



پاسخ: چون d_1 و d_2 موازی هستند پس مجموعه زاویه تند و باز برابر 180° درجه می باشد پس

$$(5x+12) + (2x-7) = 180$$

داریم :

و با حل معادله تشکیل شده مقدار x به دست می آید.

$$5x+12+2x-7=180$$

$$7x+5=180$$

$$7x=180-5$$

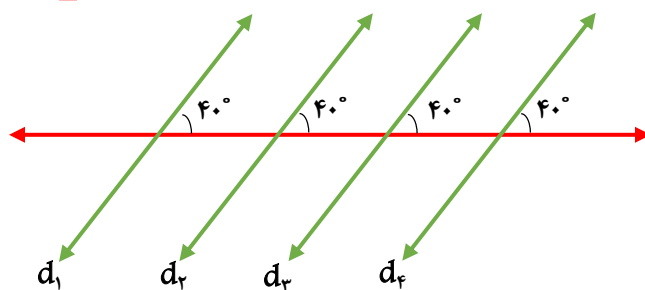
$$x = \frac{175}{7} = 25$$

نکته: اگر به جای دو خط موازی سه یا چهار خط موازی باشند و خط موربی آنها را قطع

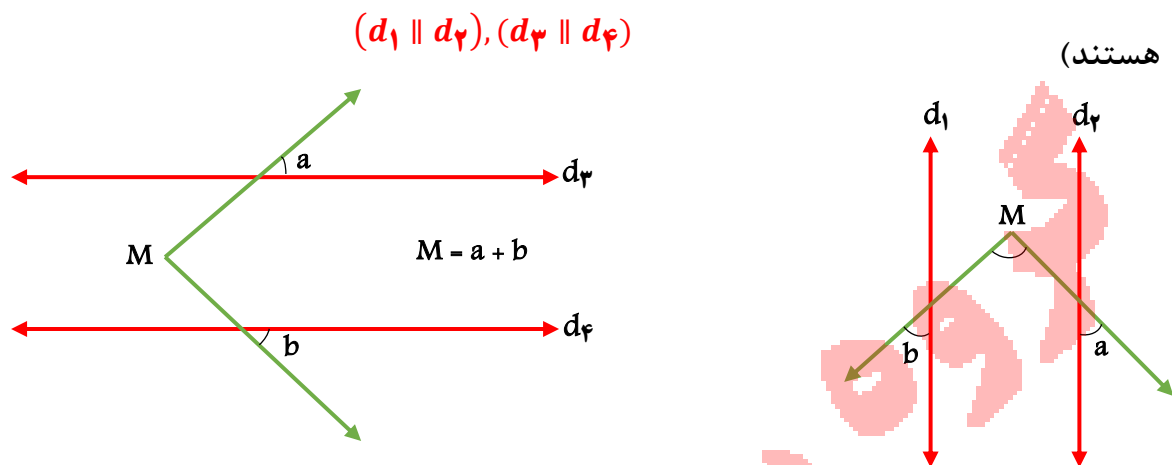
کند باز هم زاویه های تند و تشکیل شده با هم و زاویه های باز تشکیل شده با هم مساوی اند و همینطور هر زاویه تند و باز مکمل هستند و عکس نتیجه گیری صفحه قبل نیز صحیح میباشد.

مثال: در شکل مقابل خطوط d_1, d_2, d_3, d_4 موازی اند زیرا زاویه های تند ایجاد شده همگی

برابرند.



نکته: در هر شکل مقابل زاویه m با مجموع زاویه های a و b برابر می باشد. (زاویه های a و b تند



نکته: در چند ضلعی های منتظم با تعداد اضلاع زوج ضلع های روبرو موازی هستند.

نکته: در متوازی الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع اضلاع روبرو دو به دو موازی هستند و در

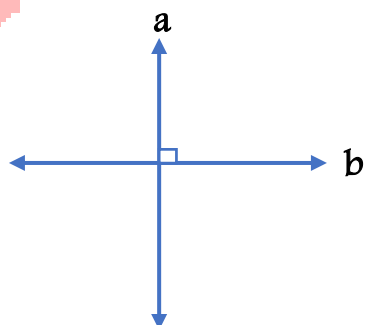
دوازده فقط دو ضلع موازی وجود دارد.

تعامد:

اگر زاویه بین دو خط متقاطع a و b برابر 90° درجه باشد می گوییم دو خط بر هم عمودند و

می نویسیم: $a \perp b$ (علامت عمود بودن)

مثال: در شکل زیر a بر b عمود است یا a و b بر هم عمودند می نویسیم: $a \perp b$ و

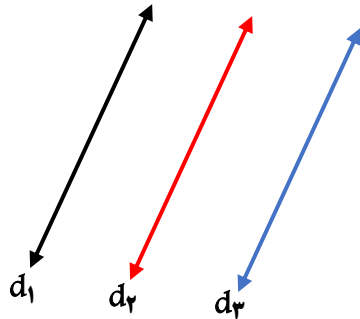


$a \perp b$

نکته: علامت عمود بودن دو خط بر هم تشکیل زاویه قائمه در محل برخورد دو خط می باشد.

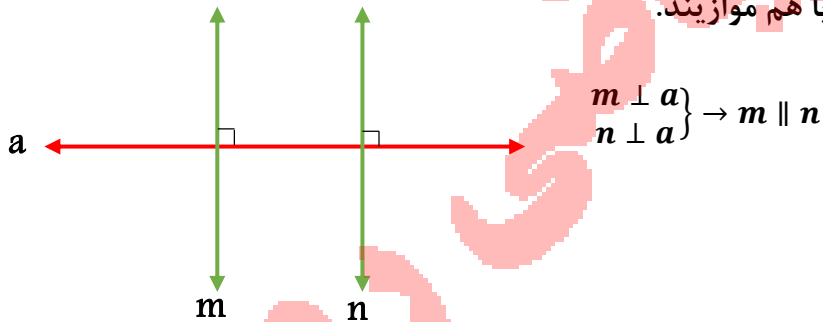
چند قانون در مورد خطوط موازی و عمود برهم

الف) دو خط موازی با یک خط خودشان موازیند.



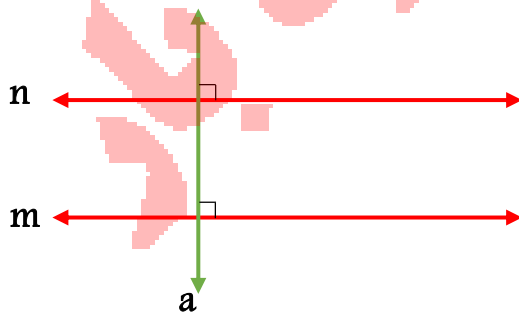
$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \\ d_2 \parallel d_3 \end{array} \right\} \rightarrow d_1 \parallel d_3$$

ب) دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند.



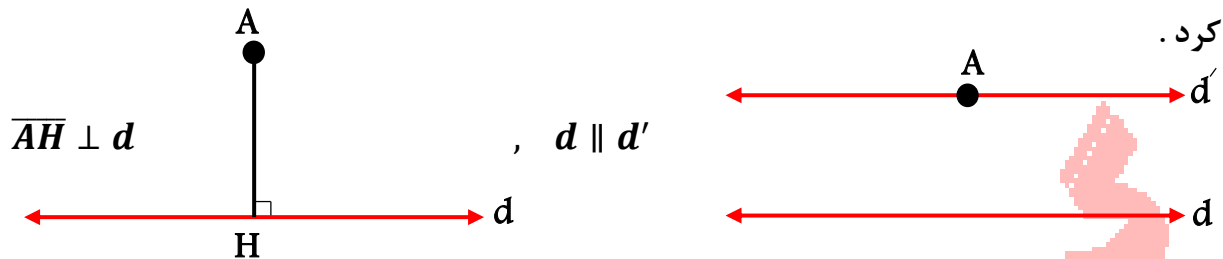
$$\left. \begin{array}{l} m \perp a \\ n \perp a \end{array} \right\} \rightarrow m \parallel n$$

پ) اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.



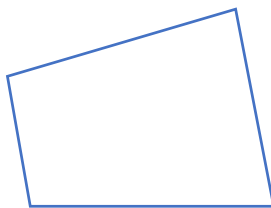
$$\left. \begin{array}{l} a \perp m \\ m \parallel n \end{array} \right\} \rightarrow a \perp n$$

ت) از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط عمود بر آن و یا یک خط موازی با خط می توان رسم کرد.

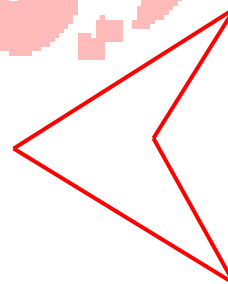


چهارضلعی:

یک چند ضلعی که دارای چهار ضلع و چهار زاویه باشد چهارضلعی نام دارد و دارای دو نوع محدب و مقعر می باشد و ضمناً مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی اعم از محدب یا مقعر 360° درجه است.



چهار ضلعی محدب



چهار ضلعی مقعر

متوازی الاضلاع

مستطیل

لوزی

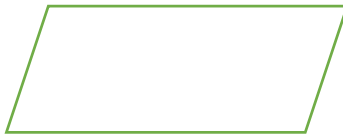
مربع

دوازنه

نکته: انواع چهارضلعی:

متوازی الاضلاع:

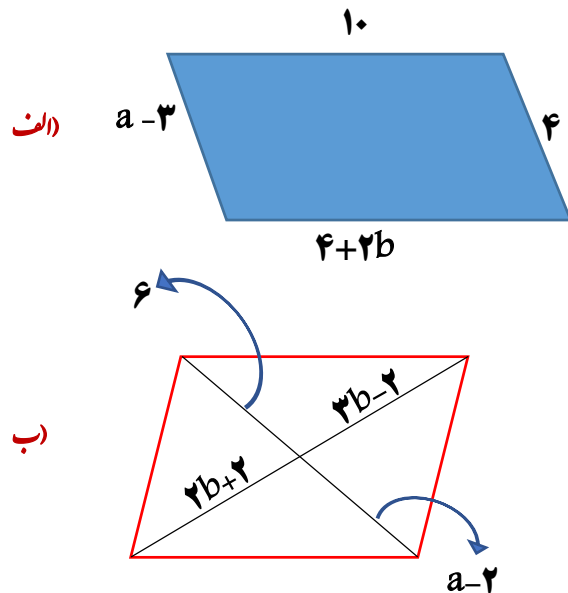
چهار ضلعی که ضلع های روبروی آن دو به دو با هم موازی هستند متوازی الاضلاع نامیده می شود.



خواص متوازی الاضلاع

- الف) در هر متوازی الاضلاع ضلع های روبرو مساوی اند.
- ب) در هر متوازی الاضلاع زاویه های روبرو مساوی اند .
- پ) در هر متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف میکنند.
- ت) در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل هستند (یعنی مجموعه شان 180 درجه می باشد)
- ث) در هر متوازی الاضلاع طبق تعریف ضلع های روبرو دو به دو موازیند.
- نکته :** هر چهار ضلعی تنها یکی از پنج خاصیت بالا را دارا باشد متوازی الاضلاع است .
- نکته :** در متوازی الاضلاع قطر ها نیمساز زاویه ها نیستند.
- نکته :** اگر یک چهار ضلعی دوضلع روبروی مساوی و موازی داشته باشد متوازی الاضلاع است.

تمرین: در هر شکل زیر مقدار A و B را پیدا کنید. (از خواص متوازی الاضلاع کمک بگیرید)



مستطیل:

متوازی الاضلاعی (هر چهار ضلعی) که چهار زاویه 90° درجه یا قائمه دارد مستطیل نام دارد.

نکته: متوازی الاضلاعی که یک زاویه اش 90° درجه باشد طبق خواص متوازی الاضلاع بقیه زاویه

هایش هم 90° درجه می شود و مستطیل است.

نکته: مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است.

خواص مستطیل:

چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خاصیت های متوازی الاضلاع را دارا می باشد و علاوه بر آن ها دو خاصیت دیگر نیز دارد:

الف) در مستطیل قطر ها مساوی اند.

ب) در مستطیل چهار زاویه برابر 90° درجه هستند.

نکته: هر چهار ضلعی که قطرهایش مساوی باشد همیشه مستطیل نیست و در صورتی مستطیل است که قطر ها علاوه بر مساوی بودن همدیگر را نصف کنند .

نکته: در مستطیل قطر ها معمولاً نیمساز نیستند مگر اینکه اضلاع همه برابر باشند.

لوزی:

لوزی متوازی الاضلاعی (چهار ضلعی است) که چهار ضلع برابر دارد.

نکته: متوازی الاضلاعی که دو ضلع مجاورش برابر باشد طبق خواص متوازی الاضلاع می فهمیم که چهار ضلع آن برابر می شود و شکل به لوزی تبدیل می گردد .

نکته: لوزی نوعی متوازی الاضلاع است .

خواص لوزی:

لوزی نوعی متوازی الاضلاع است تمام خاصیت های متوازی الاضلاع را دارد و علاوه بر آن سه خاصیت دیگر نیز دارد.

الف) در لوزی قطر ها بر هم عمودند .

ب) در لوزی قطر ها نیمساز زاویه های مقابل هستند .

پ) در لوزی ضلع ها برابرند .

نکته: هر چهار ضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشند همیشه لوزی نیست و در صورتی لوزی است که علاوه بر عمود بودن همدیگر را نصف کنند به عبارتی قطر ها عمود منصف باشند .

مربع :

متوازی الاضلاعی (چهار ضلعی) که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه 90° درجه داشته باشد مربع نامیده می شود.

نکته: مربع نوعی متوازی الاضلاع، نوعی مستطیل و نوعی لوزی است .

نکته: اگر یک متوازی الاضلاع اضلاع مجاور برابر و یک زاویه 90° درجه باشد داشته باشد به مربع تبدیل می شود .

خواص مربع :

چون مربع متوازی الاضلاع، لوزی و مستطیل است پس تمام خواص سه شکل را داراست .

نکته: مستطیلی که دو ضلع مجاورش برابر باشد به مربع تبدیل می شود

نکته: لوزی که یک زاویه 90° درجه داشته باشد به مربع تبدیل می شود.

ذوزنقه:

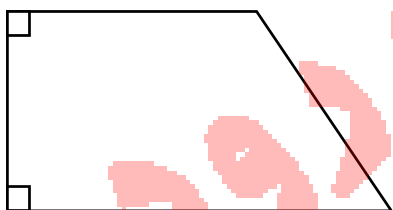
چهار ضلعی که فقط دو ضلع آن با هم موازی است ذوزنقه نام دارد.

خواص ذوزنقه:

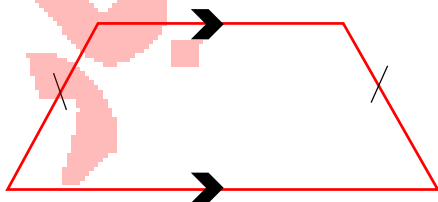
تنها خاصیت ذوزنقه علاوه بر موازی بودن دو ضلع روبرو این است که زاویه های مجاور بر هر ساق مکمل هستند.

دو نوع خاص از ذوزنقه:

الف) ذوزنقه ای که دو زاویه قائمه داشته باشد ذوزنقه قائم الزاویه نام دارد.



ب) ذوزنقه ای دو ساق برابر داشته باشد ذوزنقه متساوی الساقین نام دارد.



چند نکته :

الف) اگر وسط ضلع های یک مربع را به طور متوالی به هم وصل کنیم چهار ضلعی جدید نیز یک مربع است.

ب) اگر وسط ضلع های یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم شکل حاصل یک لوزی است.

پ) اگر وسط ضلع های یک لوزی را به هم وصل کنیم شکل حاصل یک مستطیل است.

ت) اگر وسط ضلع های یک متوازی الاضلاع را به طور متوالی به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل یک متوازی الاضلاع است.

ث) اگر وسط ضلع های یک چهار ضلعی محدب دلخواه را به طور متوالی به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل نیز یک متوازی الاضلاع است.

ج) از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی هر متوازی الاضلاع یک مستطیل به دست می آید.

چ) از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی هر مستطیل یک مربع حاصل می شود.

ح) از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی هر لوزی یا هر مربع یک نقطه حاصل می شود زیرا در لوزی و مربع قطرهای نیمساز زاویه های داخلی هستند.

کاشی کاری

در کاشی کاری ها کاشی ها طوری کنار هم قرار می گیرند که جای خالی بین آنها نباشد و روی هم

قرار نگیرند در این صورت سطح به طور کامل پوشیده می شود.

نکته: در کاشی کاری از یک یا چند نوع کاشی استفاده می شود .

نکته: زمانی کاشی کاری درست انجام می شود که مجموع زاویه های تشکیل شده در هر راس 360° درجه باشد.

نکته: با کاشی هایی به شکل مثلث متساوی الاضلاع مربع شش ضلعی منتظم و چهار ضلعی محدب یک سطح پوشیده می شود .

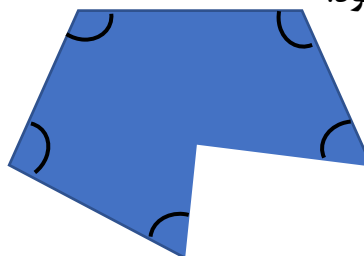
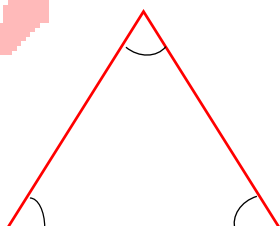
نکته: با هر چهار ضلعی دلخواه نمی توان کاشی کاری کرد ولی با همه چهار ضلعی های محدب یک سطح کاشی کاری می شود .

نکته: در صورتی با یک چند ضلعی (یا n ضلعی) منتظم یک سطح کاشی کاری می شود که 360° درجه بر هر زاویه درون آن بخش پذیر باشد.

مثال: با کاشی های هشت ضلعی منتظم یک سطح پوشیده نمی شود زیرا 360° درجه بر هر زاویه داخلی هشت ضلعی منتظم بخش پذیر نیست .

زاویه داخلی:

زاویه از برخورد دو ضلع یک چند ضلعی درون آن ایجاد می شود زاویه داخلی یا درونی یک چند ضلعی گفته می شود.

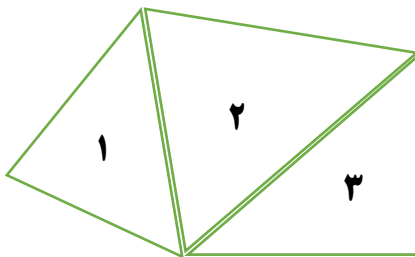


زاویه های مشخص شده زاویه ی داخلی شکل است.

مجموع زاویه های داخلی یک چند ضلعی:

می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث برابر 180 است و بر این اساس مجموع زاویه های داخلی یک چند ضلعی تعیین می شود به این صورت که چند ضلعی از یک راس به چند مثلث تقسیم شده و مجموع زاویه های داخلی با مجموع زاویه های مثلث ها برابر می شود.

مثال: پنج ضلعی مقابل به سه مثلث تقسیم شده است پس مجموع زاویه های داخلی پنج

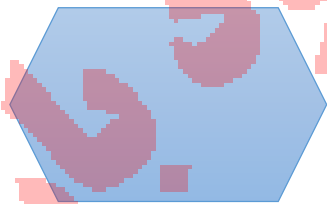


ضلعی $540 = 3 \times 180$ می باشد

مجموع زاویه های داخلی هر چند ضلعی از رابطه زیر به دست می آید:

$$180 \times (n - 2) = \text{مجموع زاویه های داخلی هر } n \text{ ضلعی}$$

مثال: مجموع زاویه های داخلی شکل مقابل چند درجه است؟



$$720 = 4 \times 180 = (6 - 2) \times 180 = \text{مجموع زاویه های داخلی}$$

مثال: مجموع زاویه های داخلی یک ۱۲ ضلعی چند درجه است ؟

$$1800 = 10 \times 180 = (12 - 2) \times 180 \rightarrow \text{پاسخ}$$

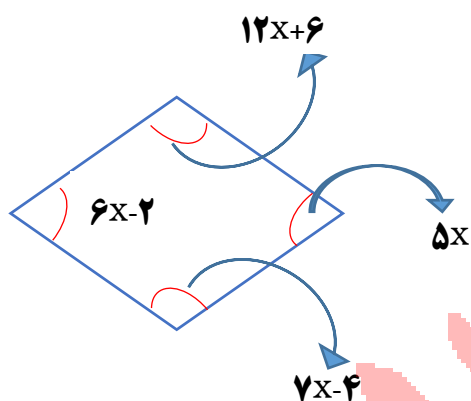
مثال: مجموع زاویه های داخلی یک n ضلعی 2160 درجه است. n برابر چه عددی است؟

$$(n - 2) \times 180 = 2160 \rightarrow \text{پاسخ}$$

$$180n - 360 = 2160 \rightarrow 180n = 2160 + 360 \rightarrow 180n = 2520 \rightarrow n = 14$$

مثال: مجموع زاویه های داخلی یک 9 ضلعی با مجموع زاویه های درونی چند مثلث برابر است؟

پاسخ: همیشه 2 تا کمتر یعنی با 7 مثلث برابر است.



مثال: در شکل مقابل مقدار x چقدر است؟

$$(4-2) \times 180 = 2 \times 180 = 360 \rightarrow \text{مجموع داخلی های زاویه مجموع}$$

$$12x + 6 + 5x + 6x - 2 + 7x - 4 = 360$$

$$30x = 360$$

$$x = 12$$

اندازه هر زاویه داخلی یک چند ضلعی منتظم:

چون زاویه های داخلی یک چند ضلعی منتظم با هم برابرند پس هر زاویه داخلی یک چند ضلعی

منتظم از رابطه مقابل به دست می آید

$$\frac{(n-2) \times 180}{n}$$

مثال: هر زاویه داخلی یک ۸ ضلعی منتظم چند درجه است؟

$$\text{پاسخ} \rightarrow n=8 \rightarrow \frac{(8-2) \times 180}{8} = \frac{6 \times 180}{8} = \frac{1080}{8} = 135$$

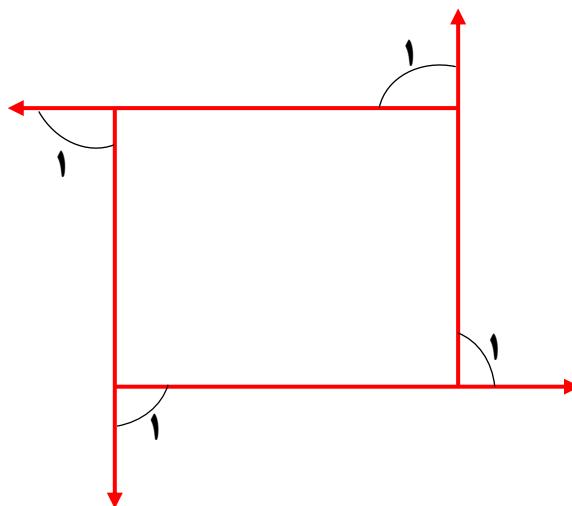
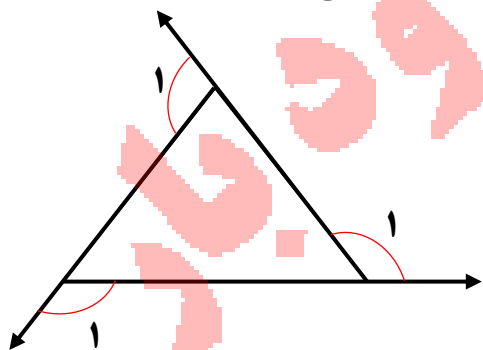
مثال: هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم ۱۴۴ است، n برابر چند است؟

$$\begin{aligned} \text{پاسخ} \rightarrow \frac{(n-2) \times 180}{n} = 144 &\rightarrow (n-2) \times 180 = 144n \rightarrow 180n - 360 = 144n \rightarrow 180n - 144n = 360 \\ &\rightarrow 36n = 360 \rightarrow n = 10 \end{aligned}$$

زاویه خارجی:

در یک چند ضلعی محدب زاویه ای که در هر رأس بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می شود زاویه خارجی نامیده می شود.

مثال: در شکل های زیر زاویه هایی که با عدد ۱ نامگذاری شده، زاویه خارجی هستند.

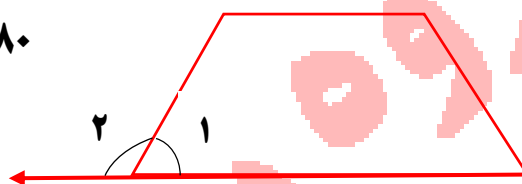
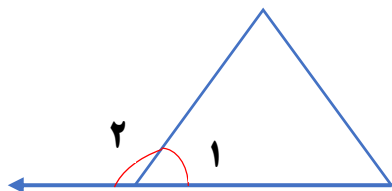


نکته: در هر راس چند ضلعی محدب دو زاویه خارجی به وجود می‌آید و چون آن دو متقابل به راس هستند با هم مساوی هستند و هر چند ضلعی محدب به تعداد ضلع هایش زاویه خارجی دارد.

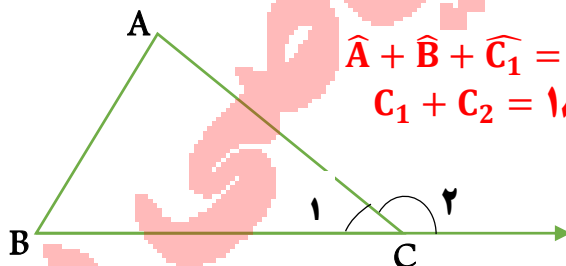
چند نکته:

الف) مجموع هر زاویه داخلی و خارجی در یک راس چند ضلعی محدب 180° درجه است.

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$$



ب) هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش.

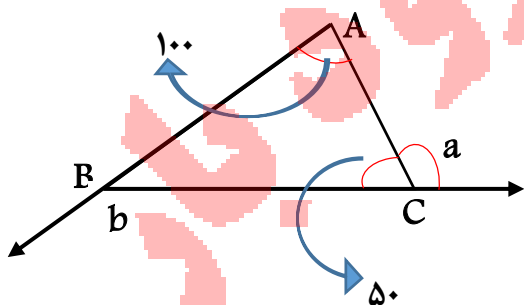


$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$

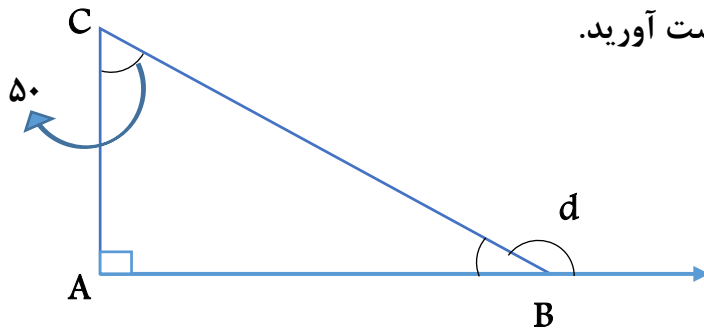
مثال: در شکل مقابل مقدار a و b را بدست آورید.

$$b = 100^\circ + 50^\circ = 150^\circ, a = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

مجموع زاویه داخلی و خارجی مجاور هم 180° است.



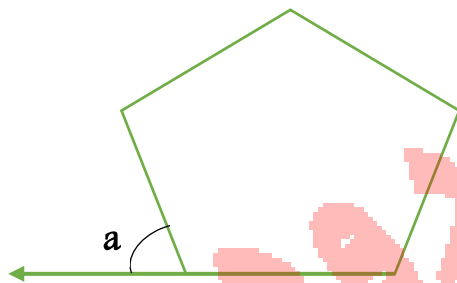
تمرین: در شکل داده شده مقدار d را بدست آورید.



نکته: مجموع زاویه های خارجی هر مثلث و حتی مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب 360° درجه می باشد.

نکته: هر زاویه خارجی یک چند ضلعی منتظم از رابطه $\frac{360}{n}$ بدست می آید که در آن n همان تعداد ضلع میباشد.

مثال: در شکل داده شده مقدار مجهول را به دست آورید.



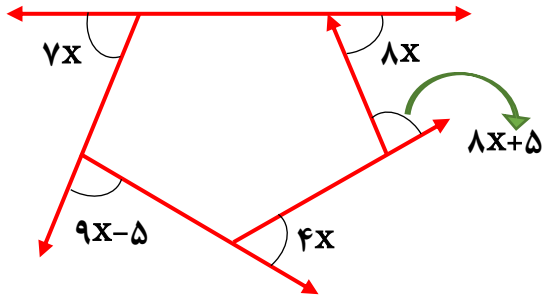
$$a = \frac{360}{5} = 72$$

نکته: اگر یکی از زاویه های داخلی یک n ضلعی منتظم معلوم باشد برای پیدا کردن تعداد اضلاع ابتدا آن زاویه را از 180° کم می کنیم تا زاویه خارجی به دست آید سپس 360° را بر آن زاویه خارجی تقسیم می کنیم تا تعداد ضلع تعیین شود.

مثال: یک زاویه داخلی یک چند ضلعی منتظم 144° درجه است. این شکل چند ضلع دارد؟

$$180 - 144 = 36, \quad \frac{360}{36} = 10 \rightarrow \text{تعداد ضلع}$$

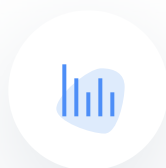
تمرین: در شکل مقابل مقدار x چقدر است ؟





اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد