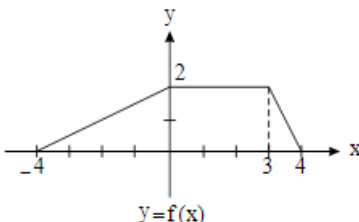


مهر مدرسه:		اداره کل آموزش و پرورش شهرستان‌های استان تهران مدیریت آموزش و پرورش ناحیه یک شهری		شماره سندلی	
محل درج نمره و امضای دبیر:		دبیرستان غیردولتی دوره دوم دانشجو سال تحصیلی ۴۰۳-۴۰۴ امتحانات نوبت اول (دی ۱۴۰۳)		نام و نام خانوادگی:	
تعداد صفحات: ۴	زمان: ۱۰۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/ ۱۰ / ۱۵	نام دبیر: استاد قانع	کلاس: دوازدهم تجربی	نام درس: ریاضی ۳
بارم	صفحه ۱				
۱/۵	۱- با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$، نمودار $y = \frac{1}{3}f(4x)$ را رسم کنید. 				
۱/۵	۲- معادلهٔ مثلثاتی $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.				
۱/۵	۳- دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2}x$				

۴- معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

۵- دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۱/۵

۶- ضابطهٔ وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt[3]{x+1}$ را به دست آورید.

۱/۵

۷- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

۱

۸- حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

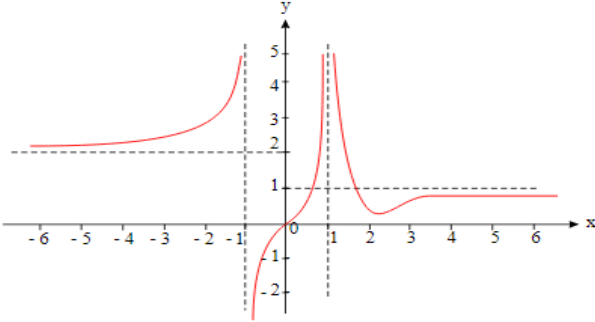
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

۴

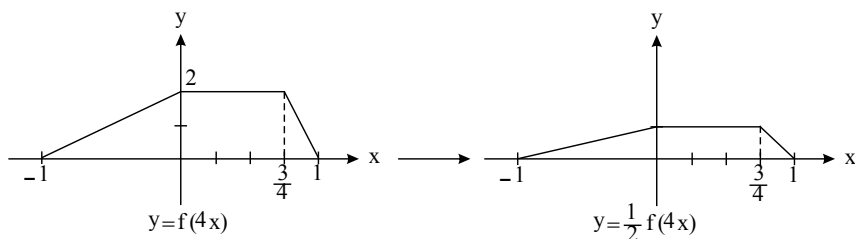
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

۱/۵	۹- درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) مینیمم تابع $y = -3\cos(\pi x) + 2$ برابر با یک است. ب) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.
۱/۵	۱۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:  الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
۱	۱۲- در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید. الف) حد تابع $f(x) = \frac{-3x^4 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند برابر می‌باشد.
۱/۵	۱۳- با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

پاسخنامه تشریحی

۱ - کافی است طول نقاط را $\frac{1}{4}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.



- ۲

$$\cos x (2 \cos x - 9) = 5 \rightarrow 2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 9A - 5 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 + 40 = 121$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 11}{2} = 5 \rightarrow \cos x = 5 \text{ (امکان ندارد)} \\ A = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 11}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۳ - دوره تناوب تابع $y = a \cos bx + c$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\text{Max} = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{Min} = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

۴ - می‌دانیم $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ است.

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

- ۵

$$f(x) = \sqrt{x-4} \rightarrow D_f : x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \geq 4, \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = \{x \geq 4, x \neq 5\} = [4, 5) \cup (5, +\infty)$$

- ۶

$$y = -5 - \sqrt{3x+1} \rightarrow \sqrt{3x+1} = -5-y \rightarrow 3x+1 = 25+y^2+10y \rightarrow 3x = y^2+10y+24 \rightarrow x = \frac{y^2+10y+24}{3}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{y^2+10y+24}{3}$$

- ۷

$$f(x) = x^2 + ax^2 + bx + 1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow r=f(2)=0 \Rightarrow 2^2 + a \times 2^2 + b \times 2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (1)$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow r=f(-1)=0 \Rightarrow (-1)^2 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} 4a + 2a = -9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = b = -\frac{3}{2}$$

(الف - ۸)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)}{(x^2 - 16)(2 + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)}{(x + 4)(x - 4)(2 + \sqrt{x})} = \frac{-1}{(8)(4)} = -\frac{1}{32}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

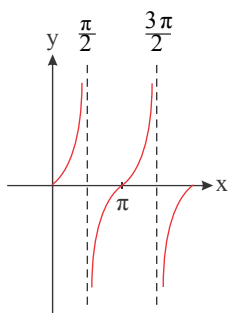
هرگاه در مسائل حدی، کسینوس یک شد حتماً 1^- است.

۹ - الف) نادرست - می‌دانیم تابع $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. پس داریم:

$$\text{مقدار مینیمم} = -|-3| + 2 = -1$$

(ب) نادرست

زیرا همان‌طور که در شکل مشخص است تابع تناظر در یک دوره تناوب خود صعودی است، نه در دامنه.



- ۱۰

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 6 \times 4 = 24$$

- ۱۱

با توجه به شکل داریم:

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

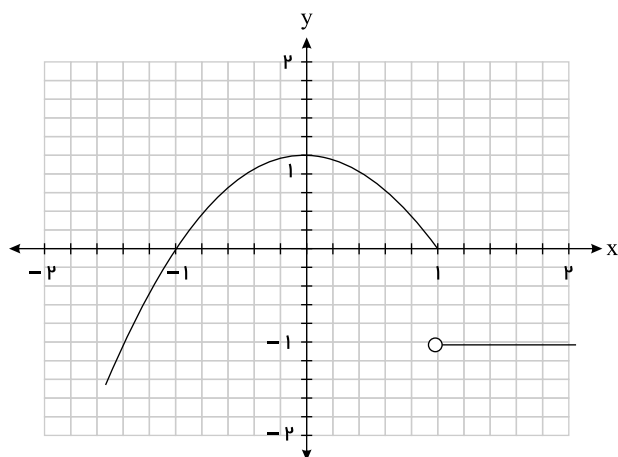
ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

- ۱۲

الف)

$$\text{علت: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^y + 5x^y}{2x^y + 9} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^y}{2x^y} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{2}x^{\frac{y}{y}} = -\frac{3}{2}(+\infty) = -\infty$$

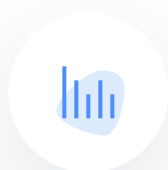
۱۳ - با توجه به نمودار در بازه $(1, +\infty) \cup [-\infty, 0]$ صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ نزولی است.





اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد