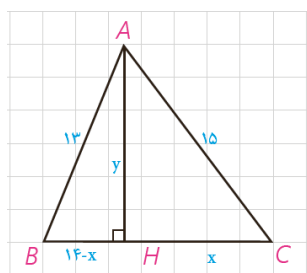


قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث)

با مسئله زیر در کتاب هندسه ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های AHB و AHC اندازه های x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :

به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می کنیم :



$$\left. \begin{array}{l} CH^2 + AH^2 = AC^2 \\ BH^2 + AH^2 = AB^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 225 \\ (14-x)^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می کنیم که با حذف y^2 معادله ای بر حسب x به دست می آید :

$$x^2 - (14-x)^2 = 56 \Rightarrow x^2 - 196 - x^2 + 28x = 56$$

$$\Rightarrow x = 9, \quad y = 12, \quad S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 84$$

اگر همین روش را در حالت کلی در مثلث ABC، که $BC=a$ ، $AB=c$ و $AC=b$ به کار ببریم، نتیجه می شود :

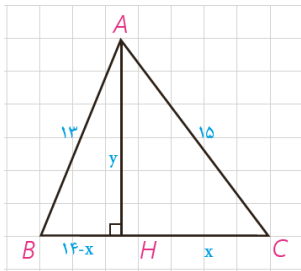
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (\text{دستور هرون})$$

که در این دستور $P = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می توانید در مجله ریاضی انتهای فصل ببینید.)

مثال: مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون

برابر است با:



$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$S = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^4} = 84$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \times 84}{14} = 12 \quad h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \times 84}{15} = \frac{56}{5}, \quad h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \times 84}{13} = \frac{168}{13}$$

کاردکلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید:

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$BD^2 = 60^2 + 80^2 = 3600 + 6400 = 10000 \Rightarrow BD = 100$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$S_{ABD} = \frac{60 \times 80}{2} = 2400 \quad \text{مساحت برابر است با نصف حاصلضرب اضلاع قائمه:}$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

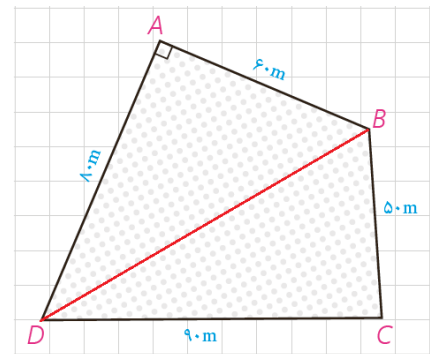
$$P = \frac{50 + 90 + 100}{2} = 120,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{120 \times (120 - 100) \times (120 - 90) \times (120 - 50)}$$

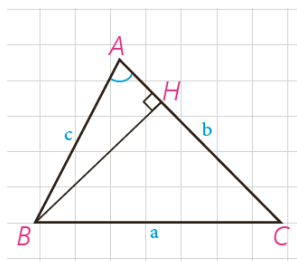
$$\Rightarrow S = \sqrt{120 \times 20 \times 30 \times 70} = \sqrt{36 \times 14 \times 10000} = 600\sqrt{14}$$

$$S = 2400 + 600\sqrt{14}$$



ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با:

فعالیت



می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به دست آوریم.

۱- در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin A$$

۲- مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

کاردرکلاس

۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{.۵. + .۷. + .۳.}{۲} = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times (\frac{۱۵}{۲} - ۵) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۷) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۳)}$$

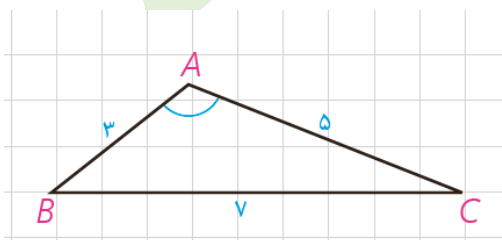
$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۲}} = \frac{۱۵}{۴} \sqrt{۳}$$

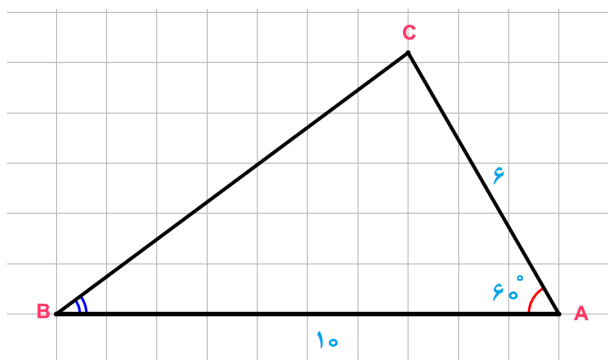
۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ بنویسید.

$$S = \frac{1}{2} \times ۳ \times ۵ \times \sin A = \frac{۱۵}{۲} \sin A$$

۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه $\hat{A}$ را به دست آورید.

$$\frac{۱۵}{۲} \sin A = \frac{۱۵}{۴} \sqrt{۳} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$





۱- در مثلث ABC، $AB=10$ ، $AC=6$ و $\hat{A}=60^\circ$.

الف) طول BC را به دست آورید.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{1}{2} = 76 \Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

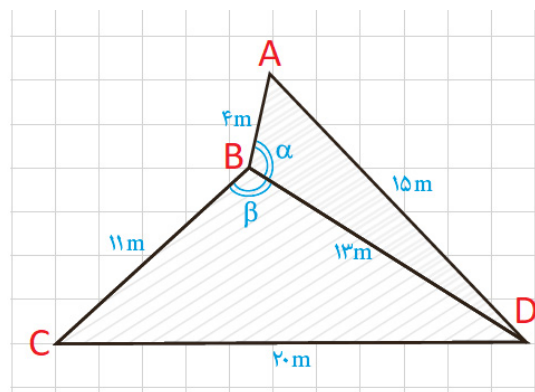
ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{19}} \Rightarrow \sin B = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{19}} \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{57}}{38}$$

۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$P_{ABD} = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16 \text{ m}$$

$$P_{BCD} = \frac{11 + 13 + 20}{2} = 22 \text{ m}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24 \text{ m}^2$$

$$S_{BCD} = \sqrt{22 \times 11 \times 9 \times 2} = 66 \text{ m}^2$$

$$S_{ABCD} = 24 + 66 = 90 \text{ m}^2$$

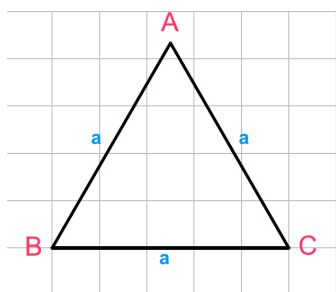
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.

$$(\alpha = \beta)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{ABD} &= \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \alpha \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times 13 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13} \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin \beta \Rightarrow 66 = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{12}{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور

هرون به دست آورید.



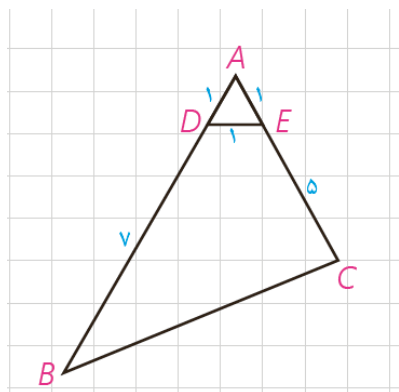
$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{3a}{2} - a\right)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{a}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۴- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانياً مساحت چهارضلعی

$DECB$ را بیابید.

با توجه به این که مثلث ADE متساوی الساقین است پس $\widehat{DAE} = 60^\circ$ در نتیجه :



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52 \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

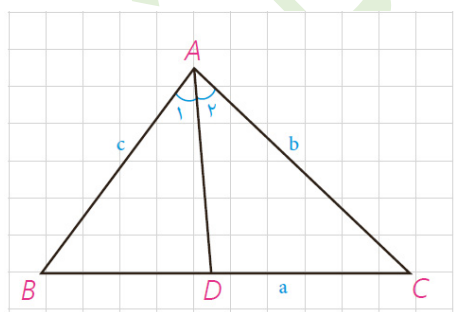
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4} \sqrt{3}$$

۵- در شکل، AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \times AD \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \dots d_a \Rightarrow (A \text{ نیمساز رأس } A) d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

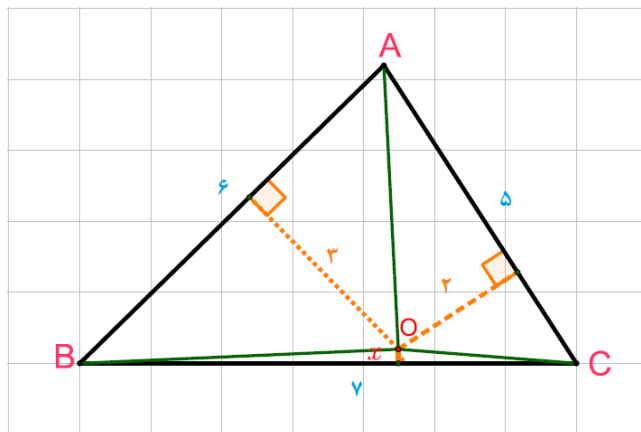
$$S_{ABC} = \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

$$6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \Rightarrow 6\sqrt{6} - 14 = \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \approx 0.2$$



۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید. راهنمایی: B را به D وصل کنید.

مثلث BCD متساوی الساقین است و با توجه به اندازه زاویه C، اندازه دو زاویه دیگر هر کدام 30° خواهد بود. در این مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم الزویه CHD، $\widehat{CDH} = 30^\circ$ در نتیجه: $CH = \frac{7}{4}$

$$\left. \begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times BD = \frac{7}{8}BD \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{7}{8}BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$P_{ABD} = \frac{11+13+7\sqrt{3}}{2} = 12 + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3})(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 7\sqrt{3})(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 11)(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 13)}$$

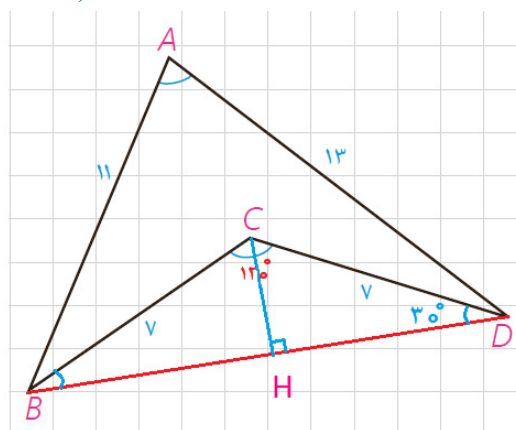
$$S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3})(12 - \frac{7}{2}\sqrt{3})(\frac{7}{2}\sqrt{3} + 1)(\frac{7}{2}\sqrt{3} - 1)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(144 - \frac{174}{4})(\frac{147}{4} - 1)} = \frac{143}{4}\sqrt{3} \quad (1)$$

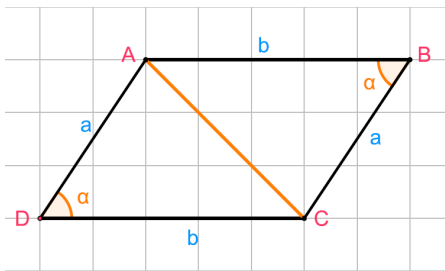
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin A = \frac{143}{2} \sin A \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{143}{2} \sin A = \frac{143}{4}\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{143}{4}\sqrt{3} - \frac{49}{4}\sqrt{3} = \frac{94}{4}\sqrt{3}$$



۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع



مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

با توجه به خواص متوازی الاضلاع داریم :

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \alpha \Rightarrow S_{ABCD} = a.b \sin \alpha$$

۹- به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos A < 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A < 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A > 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A > b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

$$\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos A > 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A > 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A < 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos A = 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A = 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A = 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر

یک از مثلث های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=10$, $AC=6$, $BC=9$

$$a=9, b=6, c=10$$

$$a^2=81, b^2+c^2=136 \Rightarrow a^2 < b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

ب) $AB=8$, $AC=4$, $BC=9$

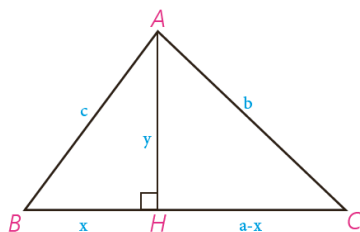
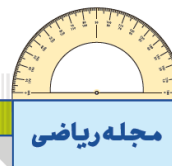
$$a=9, b=4, c=8$$

$$a^2=81, b^2+c^2=80 \Rightarrow a^2 > b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

پ) $AB=8$, $AC=15$, $BC=17$

$$a=17, b=15, c=8$$

$$a^2=289, b^2+c^2=289 \Rightarrow a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



اثبات دستور هرون (برای محاسبه مساحت مثلث)

در مثلث ABC، $AB=c$ و $AC=b$ و $AH=y$ و $BH=x$ و $BC=a$ و $CH=a-x$. با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH و تفاضل روابط به دست آمده خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ (a-x)^2 + y^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2 - c^2 = (a-x)^2 - x^2 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 = a^2 - 2ax$$

$$a^2 - 2ax \Rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیه آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود:

$$y = AH = \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}} = \frac{1}{2a} \sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}$$

$$= \frac{1}{2a} \sqrt{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]} =$$

$$\frac{1}{2a} \sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض $a+b+c=2p$ خواهیم داشت:

$$a+c-b=a+c+b-2b=2p-2b=2(p-b)$$

و به همین صورت:

$$b+c-a=2(p-a), \quad b+a-c=2(p-c)$$

و بنابراین:

$$AH = \frac{1}{2a} \sqrt{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)} =$$

$$\frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = \frac{1}{2} AH \cdot a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$