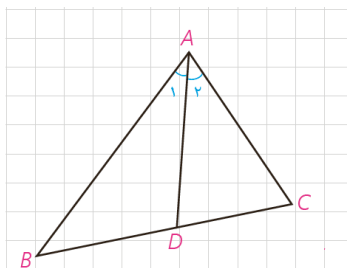


قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی



قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

اثبات: مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا $\widehat{A_1} = \widehat{E}$ و چرا $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ ؟

$AD \parallel EC$, BE مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A_1} = \widehat{E}$

$AD \parallel EC$, AC مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A_2} = \widehat{C}$

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می‌توان گرفت؟

با توجه به فرض می‌توان نتیجه گرفت که $\widehat{E} = \widehat{C}$.

مثلث AEC چه نوع مثلی است؟

متساوی الساقین است. (اگر در یک مثلث دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.)

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر

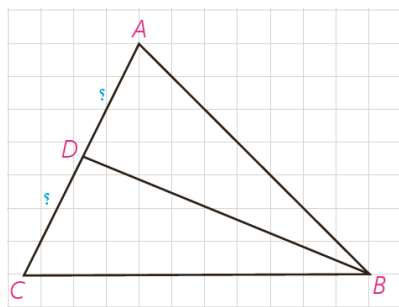
است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های
قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث،
محاسبه کرد:

مثال: در مثلث ABC ، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را
به دست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

حل:

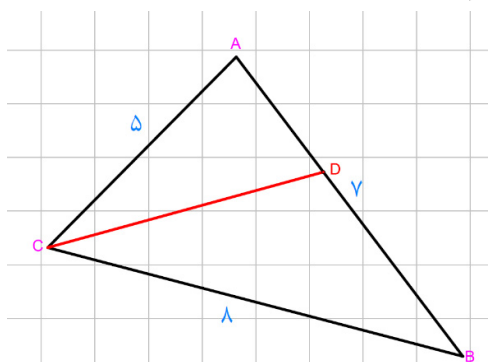


$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{5}{CD} = \frac{15}{8}$$

$$CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}, AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به دست
آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.



$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{5+8}{8} = \frac{AD+BD}{BD} \Rightarrow \frac{13}{8} = \frac{7}{BD}$$

$$BD = \frac{8 \times 7}{13} = \frac{56}{13} \Rightarrow BD = 7 - \frac{56}{13} = \frac{35}{13}$$

۲- محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)، یعنی
 AD ، امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل
می‌کنیم.

الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$ ؟

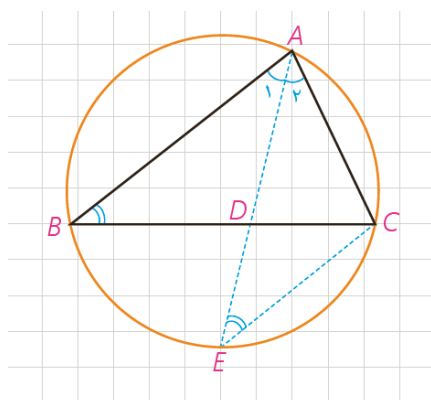
زیرا این دو زاویه هردو محاطی هستند و روبه‌رو به یک کمان (کمان AC) هستند.

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{E} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ق اول تشابه}} \triangle ABD \sim \triangle AEC$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD}$$



ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

و چون $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (چرا؟)

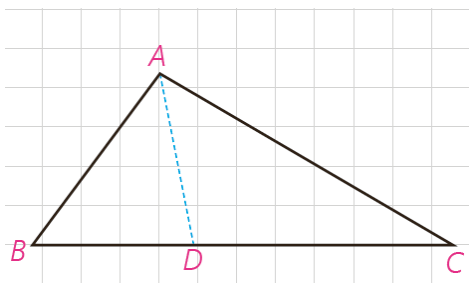
دو وتر AE و BC یکدیگر را در نقطه D درون دایره قطع کرده اند بنا بر قضیه داریم: $AD \cdot DE = DB \cdot DC$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \quad \text{بنابراین:}$$

قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

مثال: در مثلث ABC ، $AB=3$ ، $AC=5$ و $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.

حل: به کمک قضیه (۱) طول‌های BD و CD را به دست می‌آوریم:



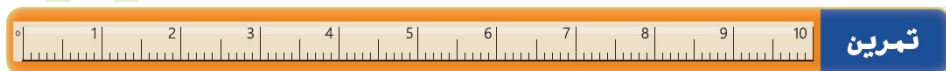
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD + CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, \quad BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3 \times 5 - \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} = 15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$



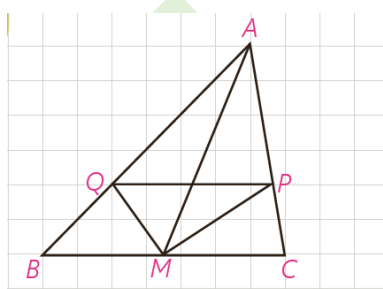
۱- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و

AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

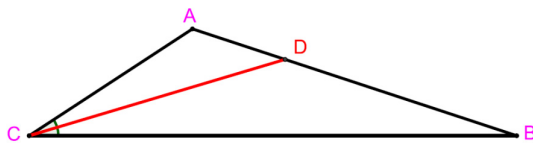
در مثلث AMB پاره خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره خط

MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{AM}{MB} &= \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \\ \frac{AM}{MC} &= \frac{AP}{PC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \parallel BC$$



۲- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=4$ و $BC=10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را به دست آورید.



$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10+4}{4} = \frac{BD+DA}{DA} \Rightarrow \frac{14}{4} = \frac{7}{DA}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{28}{14} = 2 \Rightarrow BD = 7 - 2 = 5$$

$$CD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

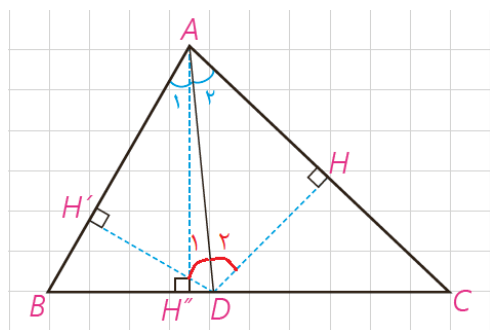
۳- با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$ ؟

راه اول:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{D}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD = AD \end{array} \right\} \rightarrow DH = DH'$$



راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله

است. پس $DH = DH'$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times AB}{\frac{1}{2} DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

(ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AH''}{\frac{1}{2} CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$