

قضیه کسینوس ها

می دانیم که در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$). با داشتن طول های دو ضلع ($AB=c$) و ($AC=b$) می توانیم اندازه وتر مثلث ($BC=a$) را بر حسب b و c به دست آوریم: $a^2 = b^2 + c^2$ حال می بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می توانیم این کار را انجام دهیم.

۱ فعالیت

در مثلث ABC ($\hat{A} < 90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده ایم. با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث های قائم الزاویه، جاهای خالی را پر کنید:

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \times \cos A \text{ و } CH = b - AH = b - c \cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \times \sin A$$

$$\triangle BHC : BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2$$

حال به کمک اتحاد های جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ، نشان دهید:

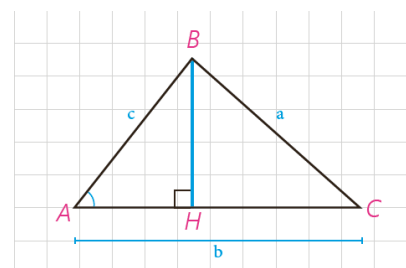
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos A$$

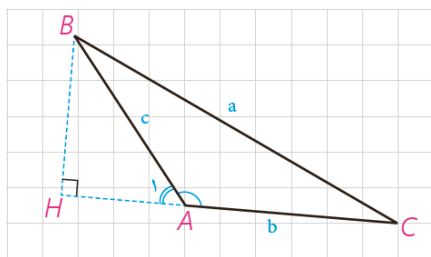
$$= b^2 + c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc \cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



اکنون در مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.
 اگر $\hat{A}_1$ زاویه خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$ داریم:
 $\sin A_1 = \sin A$ و $\cos A_1 = -\cos A$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های
 مثلثاتی می‌توان نوشت:



$$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \text{ و } \sin A_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = \dots c \dots \times (-\cos A) \text{ و}$$

$$BH = \dots c \dots \times \sin A \text{ و } CH = b + AH = b - c \cos A$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (\dots c \sin A \dots)^2 + (\dots b - c \cos A \dots)^2$$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos A$$

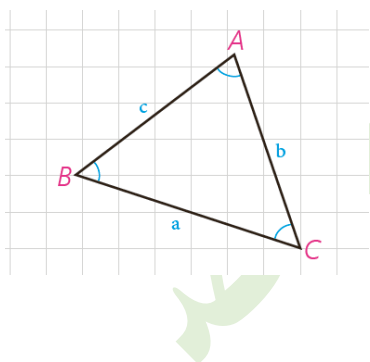
$$= b^2 + c^2 (\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}) - 2bc \cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

سؤال: در حالتی که زاویه A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

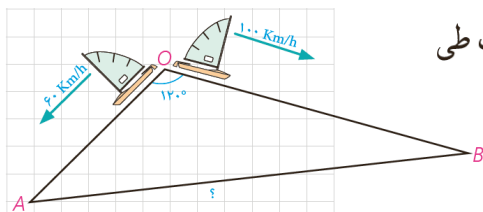
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مثال: دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های 60 km/h

و 100 km/h و با زاویه 120° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

حل: با توجه به نقطه شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی

شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود:



$$OA = 60 \times \frac{\pi}{180} = 3^\circ \text{ و } OB = 100 \times \frac{\pi}{180} = 5^\circ$$

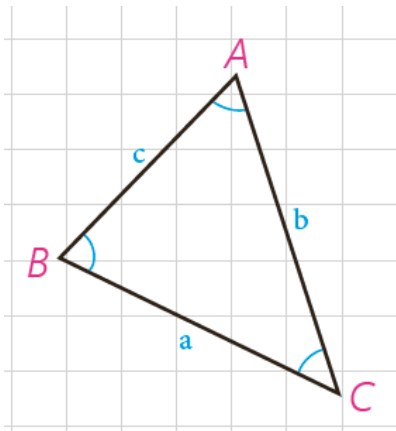
حال به کمک قضیه کسینوس ها می نویسیم :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 12^\circ \text{ و } \cos 12^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 900 + 2500 - 2 \times 30 \times 50 \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900 \Rightarrow$$

$$AB = 70 \text{ km}$$

کاردرکلاس



در مثلث ABC، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 6^\circ$
۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس ها به دست آورید.

$$BC^2 = \dots AC^2 + \dots AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos A \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \dots + (2\sqrt{2})^2 \dots - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2}) \cos 6^\circ \Rightarrow$$

$$6 + 2 + 2\sqrt{12} + 8 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \frac{1}{2} = 16 + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - 4 = 12$$

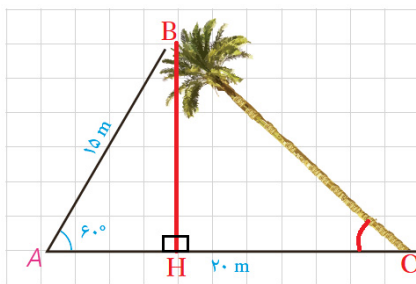
$$BC^2 = \dots 12 \dots \text{ و } BC = \dots 2\sqrt{3} \dots$$

۲- اندازه $\hat{C}$ را به کمک قضیه سینوس ها به دست آورید و از آنجا اندازه $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{C}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 6^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ و } \hat{C} = 24^\circ$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 6^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 96^\circ$$



۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه 6° دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

الف) طول درخت

$$a^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos 6^\circ = 400 + 225 - 300$$

$$\Rightarrow a^2 = 325 \Rightarrow a = 5\sqrt{13}$$

۴- در مثلث ABC، میانه AM را رسم کرده ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوس ها در دو مثلث AMB و AMC، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه ها})$$

$$\triangle ACM: b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times m_a \times \cos \alpha$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\triangle ABM: c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{c}{2} \times m_a \times \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos \alpha + \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

در حالت خاص $AB = c = 4$ و $AC = b = 6$ و $BC = a = 8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.

$$AB = c = 4, \quad AC = b = 6, \quad BC = a = 8$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 \Rightarrow AM = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{2(36 + 16) - 64}{4} \Rightarrow AM = 10$$

۵- در مثلث ABC، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس ها در دو مثلث ADC و ADB درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$

$$\triangle ABD: AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos \alpha$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^2 \cdot DC = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

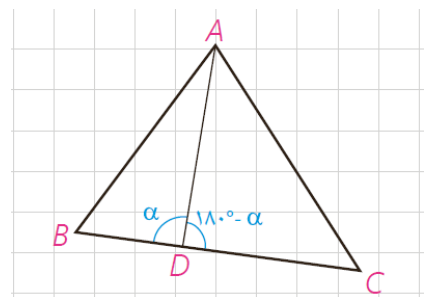
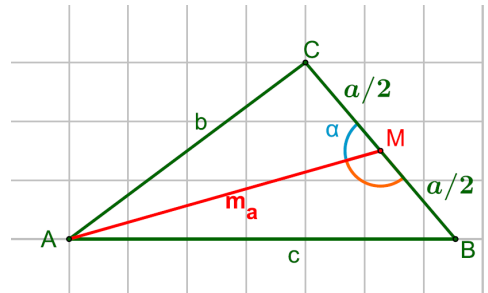
$$\triangle ACD: AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2 \cdot DB = DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha + DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 (\underbrace{DC + DB}_{BC}) + BD \cdot DC (\underbrace{DC + DB}_{BC})$$

$$\Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

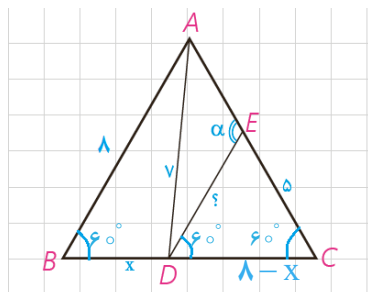


به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

$$DC = DB = \frac{a}{2}, AC = b, \Rightarrow AB = c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \times c^2 + \frac{a}{2} \times b^2 = AD^2 \times a + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a \Rightarrow \frac{a}{2}(c^2 + b^2) = \frac{a}{2}(2AD^2 + \frac{a^2}{2})$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$



۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

$$AB = AC = BC = 10, AD = 7, DB = x, DC = 8 - x, DB < DC$$

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$\Rightarrow 64(8 - x) + 64x = 49 \times 10 + 8x(8 - x)$$

$$\Rightarrow 64 \times 8 - 64x + 64x = 49 \times 10 + 8x(8 - x)$$

$$\xrightarrow{\div 8} 64 = 49 + 8x - x^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = 5 \xrightarrow{DB < DC} x = DB = 3, DC = 5$$