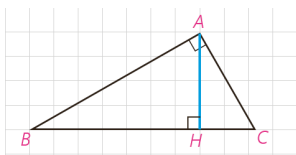


قضیه سینوس ها

یادآوری



منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم:

$$AB^2 = BC \cdot BH \quad ۱-$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \quad ۲-$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع قائم واسطه هندسی وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است.

$$AH^2 = BH \cdot CH \quad ۳-$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی قطعه‌های ایجاد شده روی وتر است.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad ۴-$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر برابر است. (قضیه فیثاغورس)

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \quad ۵-$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب اضلاع قائمه با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر برابر است.

اینک به ادامه بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.

فعالیت ۱

در کتاب ریاضی ۱ (پایه دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا

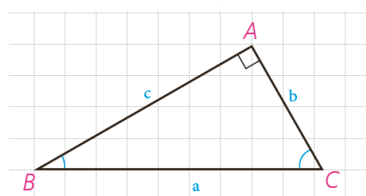
شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویه ABC، جاهای خالی را

پر کنید:

$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

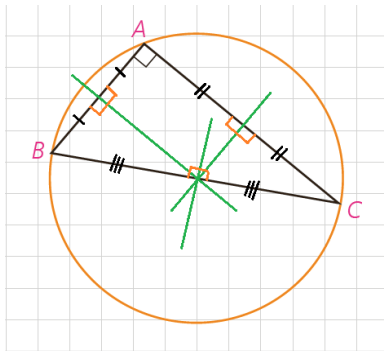
$$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$



بنابراین داریم :
در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر است با اندازه وتر. مثلث..

۲ فعالیت



در کتاب هندسه ۱ دیدیم که عمود منصف های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایره محیطی مثلث است. دایره محیطی مثلث قائم الزاویه ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

محل برخورد عمود منصف ها در هر مثلث قائم الزاویه وسط وتر است. پس مرکز این دایره وسط وتر است.

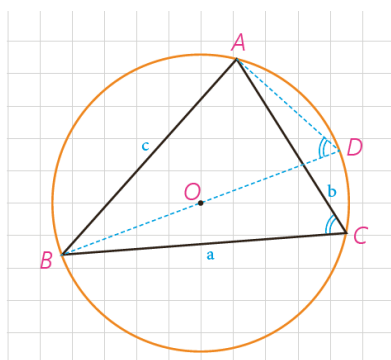
$\widehat{BAC} = 90^\circ$ یک زاویه محاطی است و اندازه کمان مقابل آن 180° یعنی وتر BC دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی قطر دایره است.
با توجه به نتیجه فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم :

در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه قطر. دایره محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

۳ فعالیت

مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایره محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.



قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم. ($BD = 2R$)

۱- زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

این دو زاویه محاطی هستند و هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{AB}$ هستند پس هم اندازه‌اند.

اندازه آنها برابر است با نصف کمان $\widehat{AB}$.

۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم الزاویه است؟

زیرا زاویه A محاطی روبه‌رو به قطر دایره است. $\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{180^\circ}{2}$

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم :

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{c}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

۴- به طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

۵- حال مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) را در نظر بگیرید. نقطه دلخواه A' روی کمان

BC را به B و C وصل می کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

این دو زاویه مکمل هم هستند.

راه اول: چهارضلعی $ABA'C$ محاطی است پس بنا بر قضیه زوایای مقابل مکمل هستند.

راه دوم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BAC}}{2} \\ \hat{A}' &= \frac{\widehat{BAC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$$

$\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه ای حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$$

در مثلث $A'BC$ ، طبق نتیجه قسمت (۳) می توانیم بنویسیم :

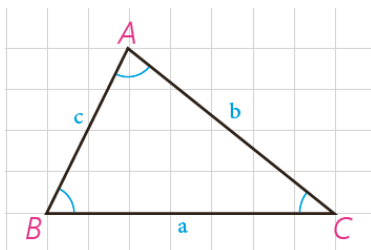
$$\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

طول قطر برابر با $2R$ است.

نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع.. به سینوس زاویه روبه رو به

آن برابر است با طول قطر دایره محیطی.. مثلث..



قضیه سینوس ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

مثال ۱: در مثلث ABC ، $BC=10\text{ cm}$ و $\hat{A}=12^\circ$ و $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به دست آورید.

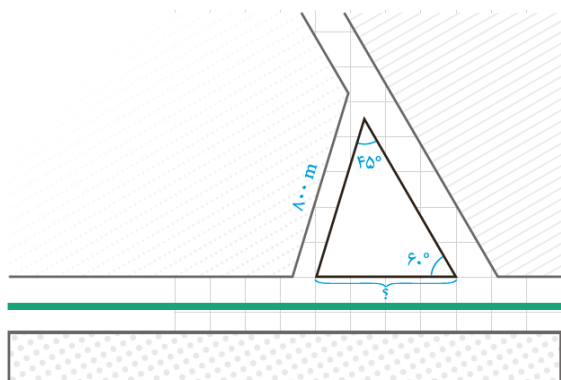
حل: به کمک قضیه سینوس ها می توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 12^\circ} = 2R \text{ و } \sin 12^\circ = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ و } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

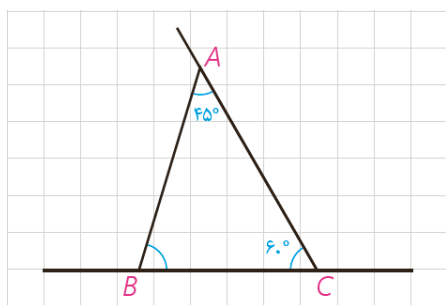
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B=45^\circ \text{ یا } 135^\circ \text{ و } \hat{A}=12^\circ \Rightarrow \hat{B}=45^\circ \Rightarrow \hat{C}=125^\circ$$



مثال ۲: از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویه 6° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول 80 m متر بنا کند تا با زاویه 45° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله ای از رأس زاویه 6° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه ای می سازد؟

حل: با یک شکل مناسب مسئله را مدل سازی می کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه های زوایای داخلی مثلث، روشن است که $\hat{B} = 180^\circ - (45^\circ + 6^\circ) = 75^\circ$ ؛ یعنی خیابان فرعی باید با زاویه 75° از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیه سینوس ها در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{80}{\sin 6^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ} \Rightarrow BC = \frac{80 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{80\sqrt{6}}{3} \approx 653/2 \text{ m}$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی $653/2$ متر با زاویه 75° بنا کنیم.

کاردکلاس

