

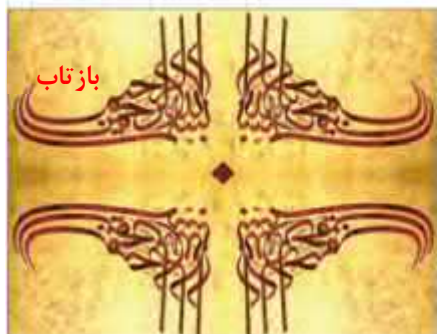
به این تصاویر دقت کنید. کدام یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟



بازتاب



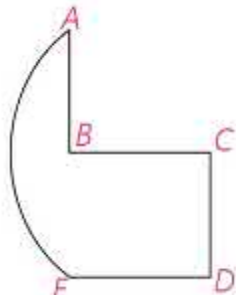
دوران



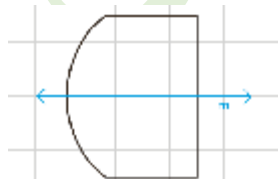
کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینه تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.

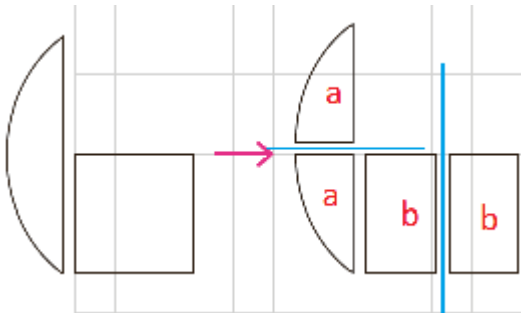
۱- می‌خواهیم کیک به شکل زیر را به طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع BCDE و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری که A و B و E روی یک خط هستند.



اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کنیم.

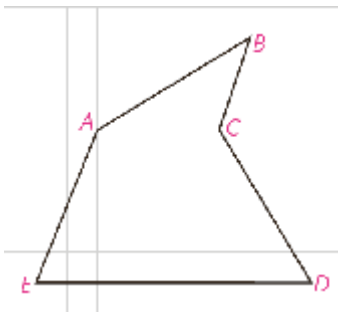


این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن کیک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.



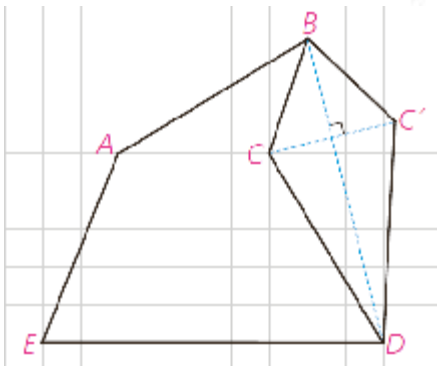
شکل های **a** نسبت به محور بازتاب قرینه اند پس با هم اندازه اند.
همچنین شکل های **b** هم نسبت به محور بازتاب خود قرینه اند و در نتیجه هم اندازه اند حالا به ره نفر یک شکل **a** و یک شکل **b** می دهیم.

۲- یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم پیرامونی یا هم محیطی معروف است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.



برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده ایم. حال می خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازه حصارکشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.

به کمک تصویر روبه رو توضیح دهید که این عمل را چگونه می توان انجام داد.



در شکل از نقطه **B** به **D** وصل می کنیم. سپس آن را به عنوان محور بازتاب در نظر می گیریم. و تصویر نقاط **B**، **C** و **D** را نسبت به این محور به دست می آوریم. واضح است که تصویر نقاط **B** و **D** روی خودشان منطبق است ولی تصویر نقطه **C** نقطه **C'** است.

چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC'DE یکی است؟

با توجه به این که بازتاب یک تبدیل طولپا است پس داریم:

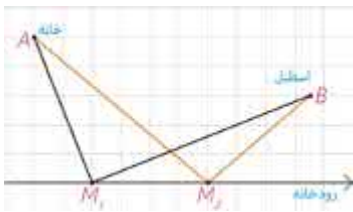
$$BC = BC', CD = C'D$$

$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA \xrightarrow{BC=BC', CD=C'D} P_{ABCDE} = AB + BC + C'D + DE + EA \\ \Rightarrow P_{ABCDE} = P_{ABC'DE}$$

■ مسائل پیدا کردن کوتاه ترین مسیر

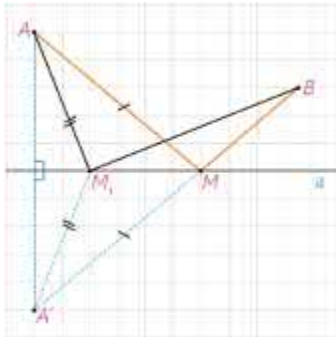
الف) هرون، ریاضی دانی است که به او دایرة المعارف ریاضی و فیزیک لقب داده اند. او که در فاصله زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد.

او با این مسئله روبه‌رو شده بود که :



«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

مسئله، پیدا کردن نقطه M روی خط d است به گونه‌ای که $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن باشد.



هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A' نامید. خط فرضی A'B خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و $AM+MB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم :

۱- برای هر نقطه دلخواه دیگری نظیر M_1 داریم $M_1A = M_1A'$ (و به همین ترتیب

$AM = A'M$)؛ چرا؟

زیرا با توجه به تعریف بازتاب خط d عمود منصف پاره خط AA' است و نقاط M و M_1 روی این خط هستند. بنا بر

خاصیت عمود منصف $AM = A'M$ و $AM_1 = A'M_1$.

۲- در مثلث $A'M_1B$ داریم $A'M_1 + M_1B > A'B$ ؛ چرا؟

بنابر قضیه نامساوی مثلثی، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است.

از تساوی $A'B = A'M + MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

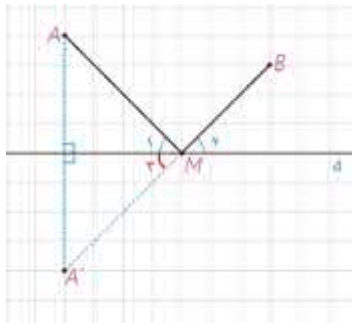
$$\left. \begin{array}{l} A'B = A'M + MB \xrightarrow{A'M=AM} A'B = AM + MB \\ A'B < A'M_1 + M_1B \end{array} \right\} \Rightarrow AM + MB < A'M_1 + M_1B$$

و چون نقطه M_1 دلخواه بود پس ادعای هرون ثابت می‌شود.

سؤال: در همین مسئله فرض کنید که d یک آینه تخت و A یک نقطه نورانی

است. نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطه B می‌گذرد (به عبارتی نشان دهید که

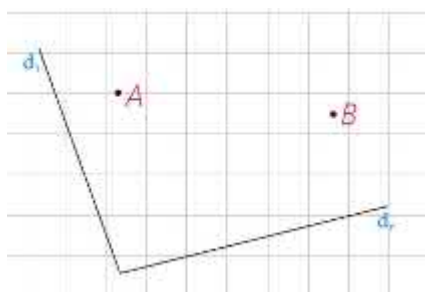
$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}).$$



نقطه M روی عمود منصف AA' است بنا براین $MA = MA'$ پس مثلث MAA'

متساوی الساقین است در نتیجه خط d نیمساز زاویه AMA' است.

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = M_2 \\ M_2 = M_1 \text{ متقابل به رأس} \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = M_2$$



ب) دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند. چگونه می‌توان با طی کوتاه‌ترین مسیر از نقطه A آغاز به حرکت کرد و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 از نقطه B گذشت؟

حل :

برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر به روش زیر عمل می‌کنیم :

قرینه A را نسبت به خط d_1 ، نقطه A_1 و قرینه A_1 را نسبت به خط d_2 ، نقطه A_2 می‌نامیم.

از A_2 به B وصل می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با d_2 ، B_1 می‌نامیم.

به همین ترتیب از B_1 به A_1 وصل می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با d_1 ، B_2 می‌نامیم. از A به B_2 وصل می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که مسیر مورد نظر AB_2B_1B است.

تذکر: این مسئله را فقط در حالتی مطرح می‌کنیم که A و A_1 هر دو در یک طرف خط P_1P_2 باشند و پاره‌خط‌های A_1B و P_1P_2 متقاطع باشند.

کافی است نشان دهیم این مسیر از تمام مسیرهای دیگر کوتاه‌تر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که طول این مسیر با طول پاره‌خط A_2B برابر است.

(۱)

$$\left. \begin{aligned} A_1B_2 &= AB_2 \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 = A_1B_1 \\ A_1B_1 &= A_2B_1 \Rightarrow A_1B_1 + B_1B = A_2B \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 + B_1B = A_2B$$

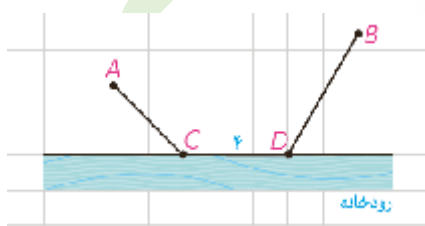
(۲) حال مسیر دلخواه دیگری مانند AMNB را در نظر می‌گیریم؛ داریم :

$$AM = A_1M \Rightarrow AM + MN = A_1N$$

$$A_1N = A_2N \Rightarrow \underbrace{AM + MN + NB}_{A_1N} = A_2N + NB$$

حال با توجه به مثلث BNA_2 داریم :

طول مسیر اول $\square$ طول مسیر دوم



ب) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

حل: مسئله را در چند مرحله حل می کنیم.

۱- اگر جاده ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر $CD=0$ ، این

مسئله به کدام یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده اید؟

مسئله هرون مردی که از رودخانه می خواهد آب بردارد و به اسطبل برود.

۲- با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسیری به شکل مسیر $ACDB$

باشد؛ اما:

(چرا؟) طول مسیر $ACDB$ = طول مسیر $ACB'B$

در واقع نقطه C تحت بردار انتقالی به طول ۴ به D منتقل شده و نقطه B' نیز تحت

همان بردار به B منتقل شده است بنا براین با توجه به خواص تبدیل انتقال چهارضلعی

$CDBB'$ متوازی الاضلاع است. پس

$$\text{مسیر } ACDB = AC + CD + DB \xrightarrow{CD=B'B, CB'=DB} ACDB = AC + CB' + B'B = \text{مسیر } ACB'B$$

$$۴ \text{ طول مسیر } ACDB = \text{طول مسیر } ACB'$$

بنابراین:

۳- پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر ممکن به شکل $ACDB$ مسیر را

به گونه ای انتخاب کنیم که طول ACB' کوتاه ترین طول ممکن باشد.

۴- به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه رو توضیح دهید که رسم کوتاه ترین مسیر

$ACDB$ چگونه است.

ابتدا نقطه B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ و موازی رودخانه و در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می دهیم؛ حالا مسئله

شبیه مسئله ی اسطبل می شود. بازتاب نقطه A را نسبت به خط کنار رودخانه به دست می آوریم یعنی نقطه A' سپس از

A' به B' وصل می کنیم نقطه C به دست می آید. از نقطه C موازی رودخانه به سمت شهر B و به طول ۴ متر حرکت

می کنیم تا نقطه D به دست آید. به این ترتیب کوتاه ترین مسیر رسم می شود.

کاردکلاس

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم

به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در

نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقه رسم مسیر

$AMNB$ را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه ترین مسیر ممکن

است.

نقطه B را تحت برداری مساوی و عمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال

می دهیم. سپس از B' به A وصل می کنیم. تا نقطه M به دست آید از نقطه M بر رودخانه عمود می کنیم تا نقطه N به

دست آید. به این ترتیب محل احداث پل MN به دست می آید به طوری که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است. مشابه

مسئله ی قسمت (پ) می دانیم که مسیر $AMB'B$ کوتاه ترین است پس:

$$\text{مسیر } AMB'B = AM + MB' + BB' \xrightarrow{MB'=NB} \text{مسیر } AMB'B = AM + NB + MN = \text{مسیر } AMNB$$

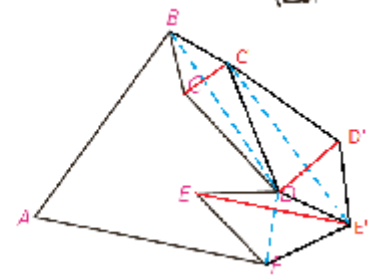
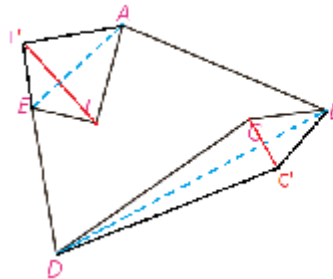


تمرین

۱- دور زمین‌هایی مطابق شکل حصار کشی شده است. چگونه می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

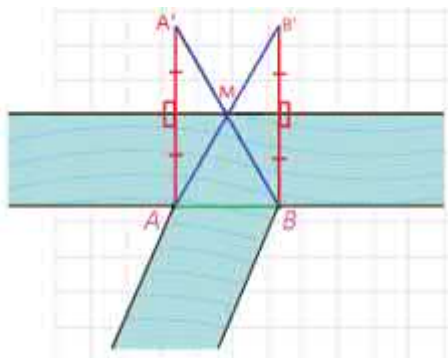
(ب)

(الف)



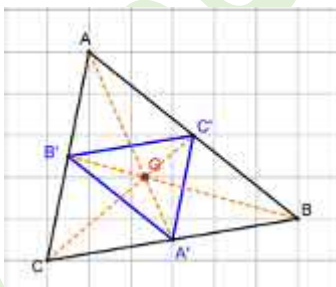
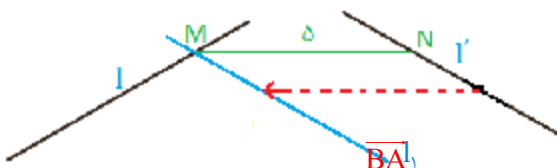
۲- می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که فاصله بین MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

با توجه به شکل واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت در نظر گرفته شده است. پس یا از نقطه B یا از A روش هرون را برای پیدا کردن نقطه M اجرا می‌کنیم.



۳- سه خط دو به دو ناموازی 1 و 1' و 1'' در صفحه مفروض اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی 1 و 1' و موازی 1'' باشد.

ابتدا روی خط 1' پاره خط دلخواه AB به طول ۵ سانتی متر را مشخص می‌کنیم. خط 1' را تحت بردار $\overline{BA}$ انتقال می‌دهیم تا خط 1 به دست آید این خط 1 را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. از نقطه M موازی خط 1' خطی رسم می‌کنیم تا خط 1' را در نقطه N قطع کند. پاره خط MN جواب مسئله است.



۴- فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{1}{3}$ باشد. (الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟ A' وسط BC، B' وسط AC و C' وسط AB قرار دارند.

باتوجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{1}{3}GA$ همچنین نقطه G بین A و A' و پس نقطه A' مجانس نقطه A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{1}{3}$ است. همین مطلب در مورد نقاط B' و C' نیز صدق می‌کند.

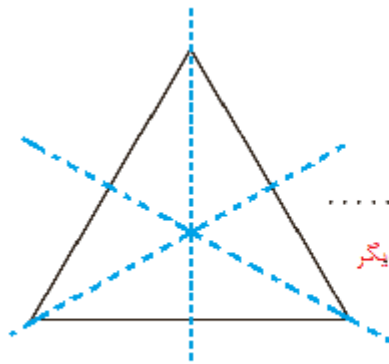
(ب) مساحت مثلث A'B'C' چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث A'B'C'، $\frac{1}{9}$ مساحت مثلث ABC است.

تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی



در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این درس تبدیلی‌هایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیلی‌هایی را تبدیلی‌های تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحه بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.



مثلث متساوی الاضلاعی را در نظر بگیرید :

الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟ ... **خود مثلث است.**

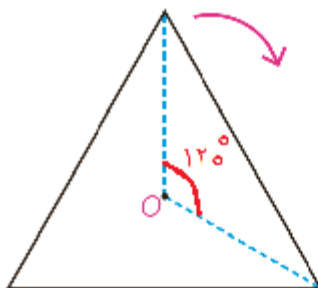
ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟ ... **خیر...**

پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟ ... **بله...**

ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟ ... **بله عمود منصف دو ضلع دیگر**

این مثلث چند خط بازتاب دارد؟ ... **سه تا...**

ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟ ... **بله دوران...**



برای مثال آیا با مرکز O (نقطه هم‌رسی نیمسازها) می‌توانید دوران‌هایی معرفی کنید

که شکل را بر خودش منطبق کند؟ ... **120° ...**

اگر $0^\circ < \alpha \leq 36^\circ$ زاویه دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویه α می‌توانید

مشخص کنید؟ ... **120° و 240° و 360°**

تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)**

دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویه $0^\circ < \alpha \leq 36^\circ$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن**

دورانی (چرخشی) دارد.

همان‌گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می‌توان معرفی کرد که نقاط

این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

به عبارتی، تحت این تبدیل‌ها تصویر این مثلث بر خودش منطبق می‌شود؛ چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی این

مثلث می‌نامیم. در این کتاب برای شناسایی تبدیل‌های تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق

جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است.

دقت کنید که دوران 360° تبدیل انتقال یا بردار صفر و تبدیل نجانس با نسبت نجانس $k=1$ ، هر شکل را به خود آن

شکل نظیر می‌کنند که پیش از این، آنها را «تبدیل‌های همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیل‌های همانی فقط تبدیل تقارنی

به شمار می‌رود.

تعریف: تبدیل طولپای I را **تبدیل تقارنی** شکل F می‌نامیم به شرط اینکه تبدیل یافته شکل F،

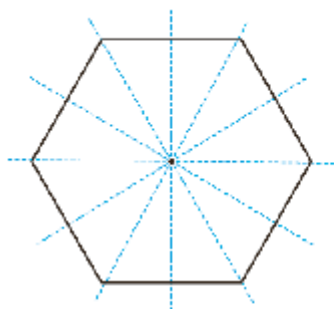
تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

تعریف: تقارن دورانی با زاویه 180° را **تقارن مرکزی** نیز می‌نامند.

در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند.

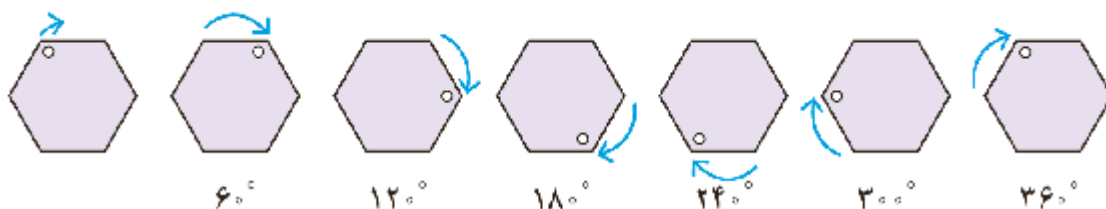
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.



تقارن‌های بازتابی :

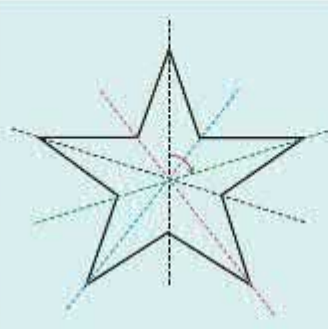
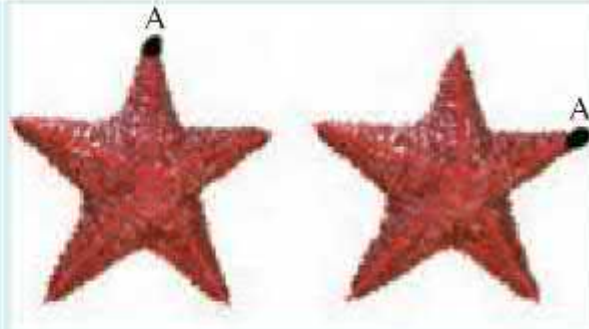
تقارن‌های دورانی :



همان‌طور که شماره تند تقارن دورانی با زاویه 360° ، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس $k=1$ تبدیل‌های

همانی هستند.

تبدیل‌های همانی را تقارن همانی نیز می‌نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.

		
تعداد کل تقارن‌ها	تعداد تقارن‌های بازتابی	تقارن‌های دورانی
۱۰ تا	۵ تا	360° ، 288° ، 216° ، 144° ، 72°

تعداد تبدیل‌های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.

الف) پاره خط ب) خط پ) دایره

الف) پاره خط دو تقارن دورانی دارد که مرکز آن وسط پاره خط و زاویه‌های آن 180° و 360° است. و یک تقارن بازتابی دارد که عمود منصف پاره خط است.

ب) خط بی شمار تقارن دورانی و بی شمار تقارن بازتابی دارد.

پ) دایره بی شمار تقارن دورانی و بی شمار تقارن بازتابی دارد.



۱- الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل‌های تقارنی n ضلعی منتظم را مشخص کنید.

n	...	$n=8$	$n=7$	$n=6$	$n=5$	$n=4$	$n=3$	n ضلعی منتظم
تعداد تقارن‌های بازتابی		تا ۸	تا ۷	تا ۶	تا ۵	تا ۴	تا ۳	
تعداد تقارن‌های دورانی		تا ۸	تا ۷	تا ۶	تا ۵	تا ۴	تا ۳	
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی		تا ۱۶	تا ۱۴	تا ۱۲	تا ۱۰	تا ۸	تا ۶	
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟		بله	خیر	بله	خیر	بله	خیر	

پ) n ضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

اگر n زوج باشد شکل مرکز تقارن دارد.

پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه‌های دوران در تقارن‌های دورانی یک n ضلعی منتظم ارائه کنید.

$$\frac{360^\circ}{n}, (\frac{360^\circ}{n} \times 2), (\frac{360^\circ}{n} \times 3), \dots, (\frac{360^\circ}{n} \times n)$$

۲- تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و دوزنقه متساوی‌الساقین را

مشخص کنید و در جدولی بنویسید.

کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

چند ضلعی	مستطیل	لوزی	مثلث متساوی‌الساقین	دوزنقه متساوی‌الساقین	متوازی‌الاضلاع
تعداد تقارن‌های بازتابی	تا ۲	تا ۲	یک	یک	ندارد
تعداد تقارن‌های دورانی	تا ۲	تا ۲	یک	یک	تا ۲
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی	تا ۴	تا ۴	تا ۲	تا ۲	تا ۲
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟	بله	بله	خیر	خیر	بله

محور بازتاب **مستطیل** عمود منصف‌های طول و عرض است و مرکز دوران محل برخورد عمودمنصف‌ها (یا قطر ها) است.

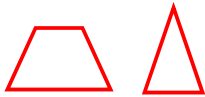
محور بازتاب **لوزی** قطرهای آن و مرکز دوران محل برخورد قطر ها است.

محور بازتاب **مثلث متساوی‌الساقین** عمودمنصف قاعده است و مرکز دوران محل برخورد عمود منصف‌های سه ضلع است. زاویه دوران 360° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

محور بازتاب **دوزنقه متساوی‌الساقین** محل عمود منصف قاعده ها است و مرکز دوران محل برخورد قطر ها است. زاویه دوران 360° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

مرکز دوران **متوازی‌الاضلاع** محل برخورد قطر های آن است.

۳- الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).



مثلاً و دوزنقه متساوی الساقین خط بازتاب دارند، ولی تقارن دورانی غیرهمانی ندارند.

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).



متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد ولی خط بازتاب ندارد.

۴- نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

d و d' دو خط بازتاب عمود بر هم هستند و نقطه A یک نقطه ی دلخواه از شکل است.

$$\left. \begin{array}{l} S(A) = A' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ S(A') = A'' \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AOA''} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\underbrace{\hat{O}_2 + \hat{O}_3}_{90^\circ}) \Rightarrow \widehat{AOA''} = 180^\circ \quad (1)$$

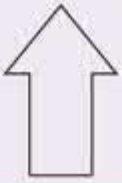
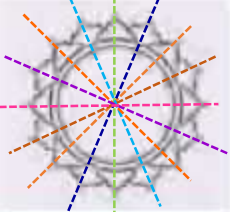
$$\left. \begin{array}{l} S(A) = A' \Rightarrow OA = OA' \\ S(A') = A'' \Rightarrow OA' = OA'' \end{array} \right\} \Rightarrow OA = OA'' \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که نقطه O مرکز دوران به زاویه 180° است.

با توجه به جدول سؤال قبل مستطیل و لوزی همین خاصیت را دارند. اما سؤال این است که آیا اگر شکلی مرکز تقارن داشته باشد حتماً دو محور بازتاب عمود برهم دارد؟ پاسخ با یک مثال نقض داده می شود

متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد یعنی یک دوران با زاویه 180° اما محور بازتاب ندارد.

ش جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی	یک	ندارد	۳ تا	۶ تا	۸ تا
تقارن دورانی	یک	یک	۳ تا	۶ تا	۸ تا
تعداد تبدیل های تقارنی	۲ تا	یک	۶ تا	۱۲ تا	۱۶ تا