



درس اول

تبدیل‌های هندسی

در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی کاری، گچ‌بری و... شکل‌های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاطش در صفحه پیدا می‌کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می‌تواند دارای ویژگی‌های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی‌ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را تبدیل‌های هندسی می‌نامیم.

تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌تواند **موقعیت** (جایگاه شکل در صفحه) یا **اندازه** شکل را تغییر دهد.
تبدیل یافته یک شکل را **تصویر** آن می‌نامیم.

در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل‌ها و برخی ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی مرور و یادآوری خواهیم کرد.

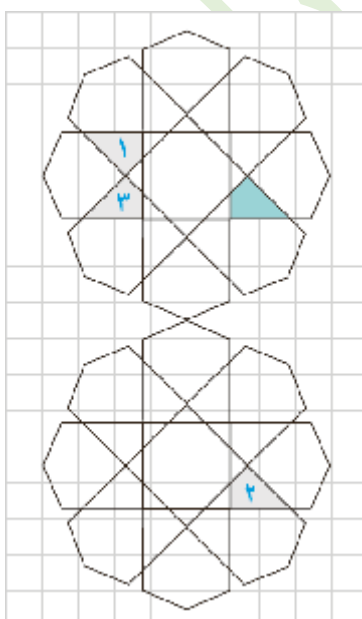
فعالیت

۱- به تصویر روبه‌رو دقت کنید.

اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافته چهارضلعی رنگ شده بدانیم:
الف) کدام چهارضلعی، انتقال یافته چهارضلعی رنگ شده است؟
چهارضلعی ۲ انتقال یافته چهارضلعی رنگ شده است.

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ شده است؟
چهارضلعی ۳ بازتاب چهارضلعی رنگ شده است.

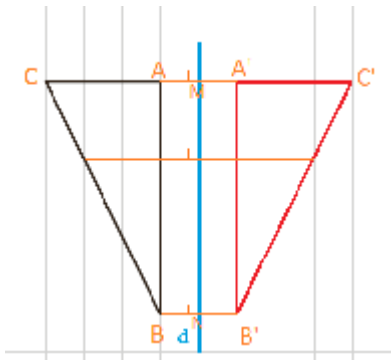
پ) کدام شکل، دوران یافته شکل رنگ شده است؟
چهارضلعی ۱ دوران یافته چهارضلعی رنگ شده است.



۲- الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.

(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟)

از هر رأس مثلث بر خط d عمودی رسم می‌کنیم و سپس به اندازه ی آن پاره خط امتداد می‌دهیم تا تصویرش به دست آید. ($AM = A'M$, $BN = B'N$, $CM = C'M$) سپس نقاط تصویر یعنی A' ، B' و C' را به هم وصل می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC است.



خط d عمود منصف پاره خطی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟ اندازه‌ها را چگونه؟

موقعیت شکل را تغییر می‌دهد اما اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

خیر شیب پاره خط BC با شیب پاره خط متناظرش $B'C'$ برابر نیست.

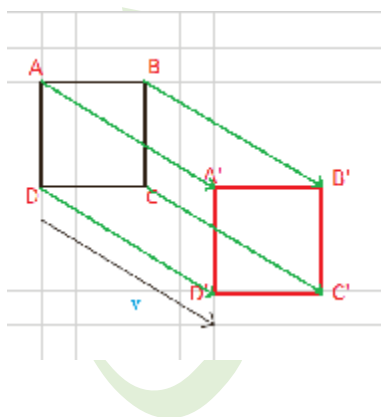
ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

اگر خط مورد نظر موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد آنگاه شیب آن حفظ می‌شود.

در شکل بالا همانطور که می‌بینیم پاره خط AC بخشی از خط عمود بر خط d است و تصویر آن نیز روی همان خط عمود قرار خواهد گرفت و به همین دلیل شیب پاره خط $A'C'$ با شیب پاره خط AC برابر است.

اگر خط مورد نظر موازی محور بازتاب باشد تصویرش هم با آن موازی است پس هم شیب خواهند شد.

۳- الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).



با توجه به بردار v باید رأس‌های مربع را ۵ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال بدهیم تا نقاط تصویر به دست آیند. واضح است که با توجه به شکل بردارها یی که هر نقطه را به تصویرش برده است با بردار v برابر هستند. سپس نقاط تصویر را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. مربع $A'B'C'D'$ انتقال یافته ی مربع $ABCD$ تحت بردار v است. در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم

چه وضعیتی دارند؟

پاره خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند باهم موازی هستند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چگونه؟

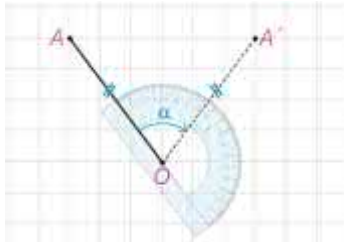
این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی‌کند ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویرش برابر است.

ت) آیا در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می شود؟

در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می شود.



۴- در سال های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و

به اندازه زاویه α ، کافی است هر نقطه از شکل، مثل نقطه A را به مرکز دوران یعنی O

وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده، به کمک OA زاویه ای برابر α رسم، و روی

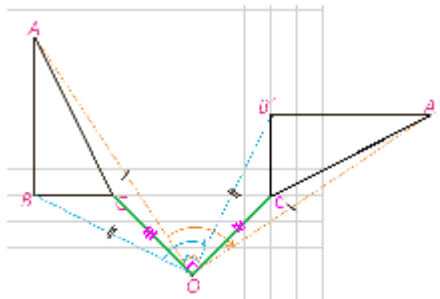
ضلع دیگر این زاویه پاره خطی به اندازه OA جدا کنیم تا نقطه A' به دست آید.

می خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و 90° درجه در جهت

حرکت عقربه های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B

را دوران داده ایم.

الف) به همین ترتیب تصویر نقطه C را پیدا، و شکل را کامل کنید.



ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می کند؟ اندازه ها را چطور؟

این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی کند ولی اندازه ها را حفظ می کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب پاره خط اولیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر است؟

در این تبدیل شیب پاره خط اولیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر نیست.

ت) آیا می توانید زاویه دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را

حفظ کند؟

اگر زاویه دوران 0° ، 180° و یا 360° درجه انتخاب شود دوران تحت آن، شیب خط را حفظ می کند.

به طور شهودی می توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره خطها و زاویه ها را تغییر نمی دهند.

در ادامه این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن بر خلاف سه تبدیل صفحه

قبل، اندازه زاویه ها حفظ می شود ولی اندازه پاره خطها تغییر می کند. این تبدیل را

تجانس می نامیم.

حال که به طور شهودی، برخی ویژگی های تبدیل های مختلف را مرور کردیم در ادامه

با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تعریف: تبدیل T در صفحه P : تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P ، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است. اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می‌نویسیم:

$$T: P \rightarrow P$$

$$T(A) = A'$$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره خط را حفظ می‌کنند؛ یعنی اندازه پاره خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازه پاره خط $A'B'$ در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً طولپایی یا ایزومتري می‌نامیم.

تعریف: تبدیل‌هایی که طول پاره خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتري) نامیده می‌شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، آنگاه داریم: $AB = A'B'$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیل‌هایی که مرور شد، اندازه زاویه حفظ می‌شود. در این فعالیت با استدلال دقیق‌تری این ادعا را اثبات می‌کنیم.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند. فرض کنید T تبدیلی طولپاست. و داریم:

$$T(A) = A'$$

$$T(B) = B'$$

$$T(O) = O' \text{ و } \widehat{AOB} = \alpha$$

دلیل همنهشتی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های

AOB و $A'O'B'$ را نتیجه بگیرید.

چون این تبدیل طولپا است پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} = \alpha$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت :

قضیه: در هر تبدیل طولی، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.

در تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب، می‌توان ثابت کرد که تبدیل یافته هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل یافته یک خط، کافی است تبدیل یافته دو نقطه دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

حال با استدلال دقیق‌تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

■ بازتاب



همان‌طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید.

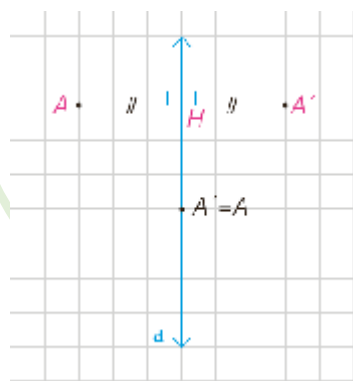
در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$S^1(A) = A'$$

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره AA' خواهد بود.

خط d ، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می‌شود.

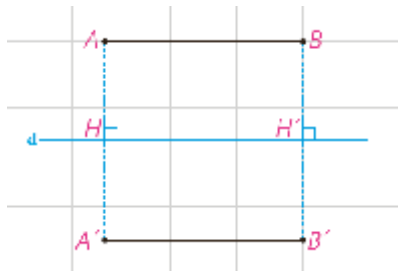
اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.



تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

فعالیت



می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیل طولی است. حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازه پاره‌خط با اندازه تصویر آن برابر است.

الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است. بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم. چرا $A'B'$ با خطوط d و AB موازی است؟

می‌دانیم مستطیل چهار ضلعی است که همه زاویه‌های آن قائمه باشد.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel d, AH \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ AB \parallel d, BH' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{B} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow ABH'H \text{ مستطیل است}$$

در هر مستطیل اضلاع مقابل با هم برابرند پس:

$$\left. \begin{array}{l} AH = BH' \Rightarrow 2AH = 2BH' \xrightarrow{\frac{AH=AH}{BH'=BH'}} AA' = BB' \\ AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow ABB'A' \text{ متوازی الاضلاع است}$$

در نتیجه: AB' موازی AB است.

$$\left. \begin{array}{l} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow A'B' \parallel d$$

از طرفی متوازی الاضلاع $ABB'A'$ زاویه قائمه دارد:

پس چهارضلعی $ABB'A'$ یک **مستطیل**... است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع روبه‌رو، دو به دو هم اندازه‌اند؛ یعنی: $AB = A'B'$.

ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

(اگر هر دو نقطه ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)

خوب در این حالت بازتاب پاره خط MA بر روی خط و بر روی خودش منطبق است.

$$S(M) = M, S(A) = A' \Rightarrow MA = MA'$$

بازتاب A نسبت به خط d ، نقطه A' و بازتاب M ، خود M است.

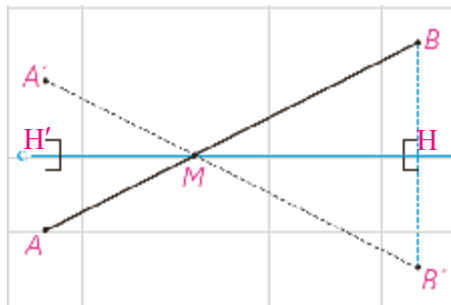
به عبارتی: $S(M) = M$ و $S(A) = A'$

آیا می‌توانید به کمک هم نهشتی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA = MA'$ ارائه

کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} AH = A'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ MH = MH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle MAH \cong \triangle MA'H \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} MA = MA', \widehat{AMH} = \widehat{A'MH}$$

حال داریم :



$$\left. \begin{aligned} AB &= MB - MA \\ A'B' &= MB' - MA' \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

$MA = MA'$ و $MB = MB'$ با توجه به قسمت ب

ت) در حالتی که پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می کنیم و آن را نقطه A' می نامیم.

پاره خط MA' را رسم می کنیم و امتداد می دهیم و ادعا می کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟

H وسط BB' و H' وسط AA' است بنا بر تعریف بازتاب نقاط H و H' روی خط d یعنی خط بازتاب هستند. با توجه به بند

ب) خط d نیمساز زاویه های BMB' و AMA' است.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AMH'} &= \widehat{BMH} \\ \widehat{A'MH'} &= \widehat{AMH'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'} = \widehat{BMH}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A'MH'} &= \widehat{BMH} \\ \widehat{B'MH} &= \widehat{BMH} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'}$$

یک ضلع (MH و MH') و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی MA' و MB' بر هم منطبق هستند.

حال داریم :

$$\left. \begin{aligned} AB &= AM + MB \\ A'B' &= A'M + B'M \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

$AM = A'M$ و $MB = MB'$ با توجه به قسمت ب

نتیجه این مراحل را می توان در قالب این قضیه بیان کرد :

قضیه: در هر بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می دهد که بازتاب، تبدیل طولها است و برای هر دو نقطه A

و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

فعالیت

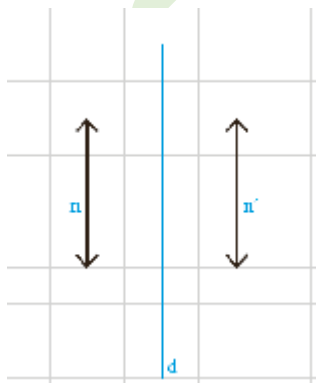
می خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می کند.

مسئله را برای دو حالت کلی در نظر می گیریم : وقتی خط داده شده با خط بازتاب

موازی باشد و وقتی با آن موازی نباشد.

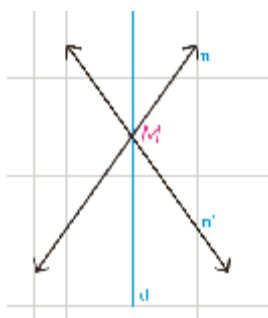
الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n'

می نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟



خط n موازی خط بازتاب d است. دونقطه دلخواه مانند A و B را روی n انتخاب می کنیم. بنا بر قسمت (الف) فعالیت قبل می دانیم که تصویر پاره خط AB نسبت به خط بازتاب d یعنی پاره خط $A'B'$ با پاره خط AB و خط d موازی است از طرفی چون خط n' تصویر خط n است پس حتما نقاط A' و B' نیز روی خط n' قرار دارند در نتیجه خط n' موازی n و d است.

وقتی دو خط موازی باشند در صورت وجود شیب، شیب ها با هم برابرند پس شیب حفظ می شود و وقتی که شیب برای یکی از آن ها تعریف نشود برای دیگری نیز تعریف نمی شود. پس در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ می کند.



(ب) اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد، خط های d ، n و n' در نقطه ای مثل M متقاطع می شوند؛ پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را ... حفظ نمی کند... بنابراین؛

در حالت کلی، بازتاب شیب خط را ... حفظ نمی کند...

دیدیم که طولها اندازه زاویه را هم حفظ می کنند. بنابراین به طور کلی هر چندضلعی و تصویر آن تحت تأثیر یک طولیا از جمله بازتاب با هم هم نهشت هستند. در ادامه به کمک ویژگی های انتقال و دوران ثابت می کنیم که این دو تبدیل نیز طولها هستند.

کاردرکلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :

(الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d ، کدام نقطه است؟ ... A ... چرا؟

چون خط d عمود منصف پاره خط AA' است بنا براین: $AA' \perp d$ ، $A'H = AH$ پس اگر از A' بر خط d عمود کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم نقطه A به دست می آید.

(ب) قرینه قرینه هر نقطه چیست؟ خود آن نقطه است.

در واقع: $S(S(A)) = S(A') = A$ و به زبان ساده تر $(A')' = A$.

(ب) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث، یک ... مثلث ... است که با مثلث اولیه ... هم نهشت ... است.

(ن) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب ... موازی ... باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می کند.

(ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافته تمام نقاط روی خط، ... روی خط ... است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب ... بیشمار ... است.

انتقال

پیداوری

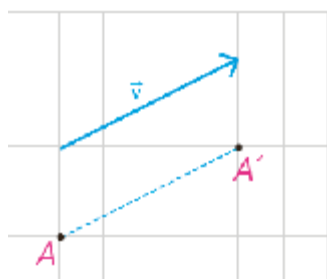


۱- در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.

۲- دو بردار، که هم اندازه، هم راستا و هم جهت باشند، دو بردار برابر هستند.



در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطه A' تصویر نقطه A باشد، آن گاه $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$



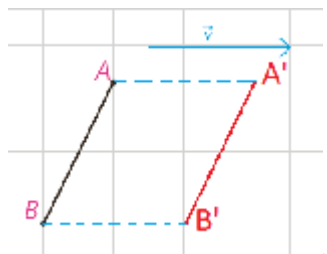
تعریف: انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ؛ تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

فعالیت

۱- می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولی است.

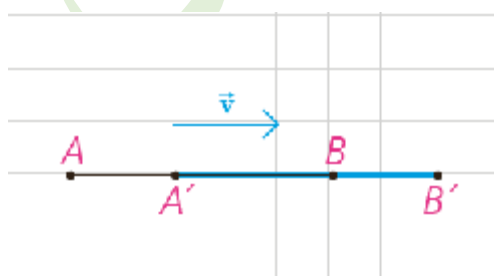
الف) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، تبدیل یافته AB را با بردار $\vec{v}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید: $AB = A'B'$.

راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



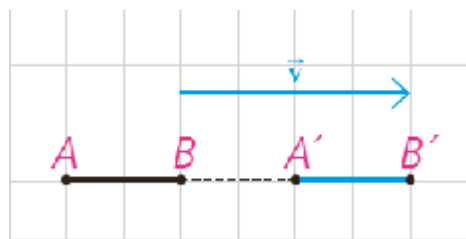
A' تصویر A است پس بنا به تعریف انتقال $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط AA' مساوی طول بردار $\vec{v}$ و با آن موازی است.
 B' تصویر B است پس بنا به تعریف انتقال $\overrightarrow{BB'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط BB' مساوی طول بردار $\vec{v}$ و با آن موازی است.
 در نتیجه AA' موازی و مساوی BB' است و بنا بر راهنمایی داده شده نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است پس $AB = A'B'$.

ب) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید: $AB = A'B'$.
 (۱)



$$\left. \begin{aligned} AB &= AA' + A'B \\ A'B' &= A'B + BB' \\ AA' &= BB' \text{ (طبق تعریف انتقال)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

(۲)



$$\left. \begin{aligned} AB &= AA' - BA' \\ A'B' &= BB' - BA' \\ AA' &= BB' \text{ (طبق تعریف انتقال)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

تذکره: در حالتی که طول بردار v با پاره خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

قضیه: در هر انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولها است و برای هر دو نقطه

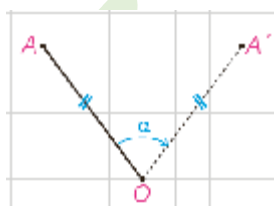
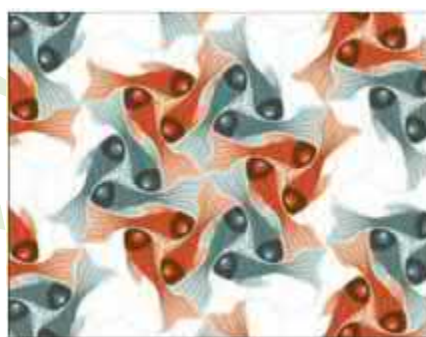
A و B از صفحه P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

۲- در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

در حالت (الف) نتیجه گرفتیم که چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی الاضلاع است پس $AB \parallel A'B'$ در نتیجه شیب خط‌ها یکی است.

در حالت (ب) و (پ) هر پاره خط و تصویرش بر روی یک خط قرار دارند به عبارتی نقاط A, B, B', A' هم خط هستند. پس شیب آن‌ها هم برابر است.

■ دوران



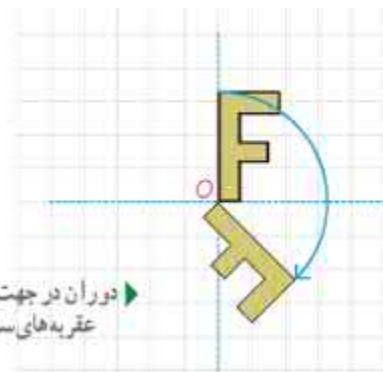
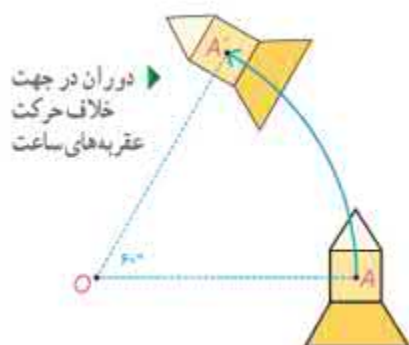
دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره خطی به اندازه OA جدا می‌کنیم تا A' به دست آید.

بدین ترتیب:

تعریف: دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است

که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

$$OA = OA' \text{ و } \widehat{AOA'} = \alpha$$

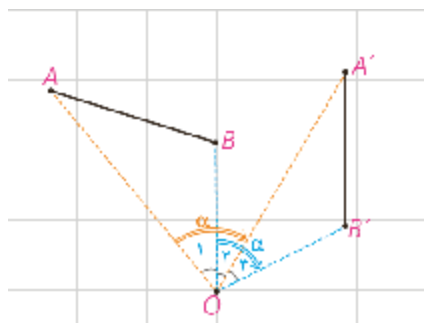


می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیل طولپاست.

برای دوران دادن هر پاره‌خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A' و B' حاصل شود. پاره خط $A'B'$ را رسم می‌کنیم.

مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم:

الف) مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.



با توجه به شکل $O_1 + O_2 = O_3 + O_4 = \alpha$

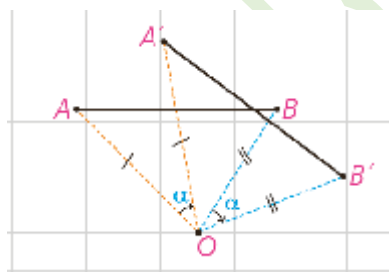
پس می‌توان مدعی شد که $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و $OA'B'$ نشان دهید AB و $A'B'$ هم اندازه‌اند.

با توجه به تعریف دوران $\left\{ \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \text{ (ض ز ض)}$ $AB = A'B'$ (اجزای نظیر)

ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره‌خط AB واقع نباشد ولی زاویه دوران از زاویه $\widehat{AOB}$ کمتر باشد، باز هم تساوی $AB = A'B'$ برقرار است.

تذکره: در حالتی که $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

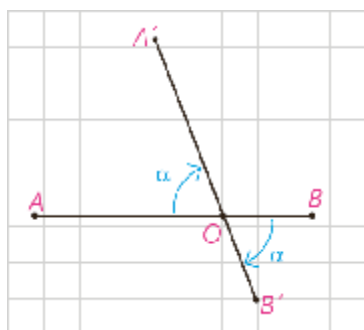


با توجه به شکل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AOB} = \alpha + \widehat{A'OB} \\ \widehat{A'OB'} = \alpha + \widehat{A'OB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

در نتیجه:

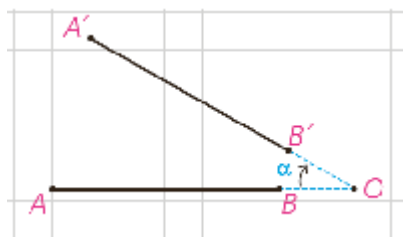
با توجه به تعریف دوران $\left\{ \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \text{ (ض ز ض)}$ $AB = A'B'$ (اجزای نظیر)



پ) اگر نقطه O روی پاره خط AB باشد :

$$\left. \begin{aligned} AB &= AO + OB \\ A'B' &= A'O + O'B' \\ AO &= A'O \text{ و } OB = O'B' \text{ طبق تعریف دوران} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطه O روی امتداد پاره خط AB باشد، حکم برقرار است.



$$\left. \begin{aligned} AB &= AO - OB \\ A'B' &= A'O - O'B' \\ AO &= A'O \text{ و } OB = O'B' \text{ طبق تعریف دوران} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین :

قضیه: در هر دوران، اندازه هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند.

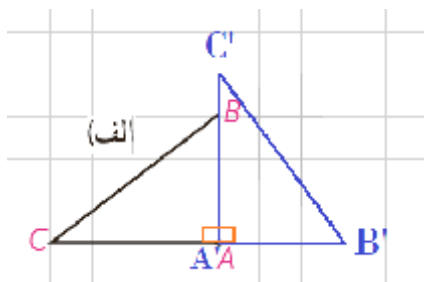
به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیل طولی است و برای هر دو نقطه A

و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

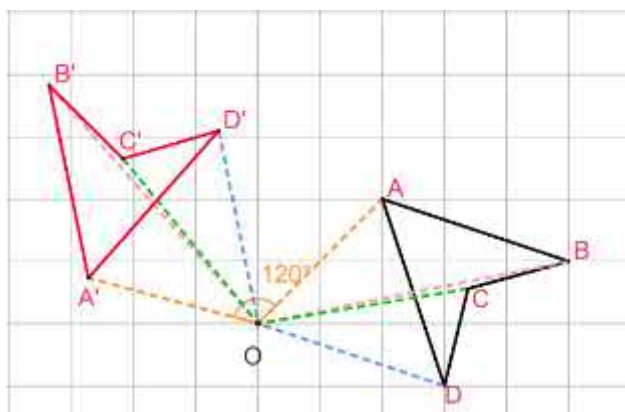
کاردرکلاس

دوران یافته هر شکل را رسم کنید.

الف) دوران به مرکز A و با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت



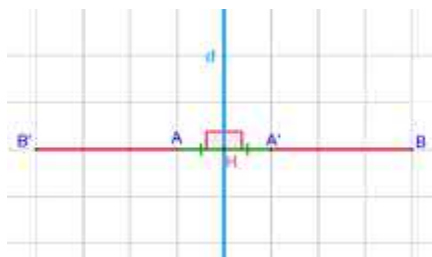
ب) دوران به مرکز O و با زاویه 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت





۱- در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید

که اگر A'B' بازتاب AB باشد، AB و A'B' هم اندازه‌اند.

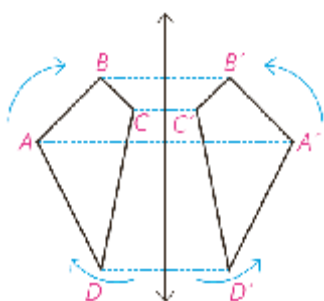


بنا بر تعریف بازتاب $B'H = BH \Rightarrow B'A + AH = BA' + A'H$ $\xrightarrow{AH=A'H}$ $B'A = BA'$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = AA' + B'A \\ B'A = BA' \end{array} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

۲- در شکل زیر چهار ضلعی A'B'C'D' تصویر چهارضلعی ABCD تحت بازتاب است.

در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

خیر نمی‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند.

۳- در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث A'B'C' بازتاب

مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث A'B'C' را نسبت به خط d_2

رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$

$$AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' \xrightarrow{\substack{AH=HA' \\ A'H'=H'A''}} AA'' = 2HA' + 2A'H' \\ \Rightarrow AA'' = 2(\underbrace{HA' + A'H'}_m) \Rightarrow AA'' = 2m$$

ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟

بنا بر اثبات قسمت الف به روش مشابه نتیجه می‌گیریم که: $BB'' = CC'' = 2m$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث A''B''C'' را تصویر مثلث ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازه آن دو برابر فاصله ی بین دو خط بازتاب d_1 و d_2 یعنی $2m$ و راستای آن عمود بر این

دو خط است، می‌توان مثلث A''B''C'' را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی یکدیگر هستند یک انتقال است.

۴- در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = 2\theta$

خط d_1 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه AOA' است یعنی: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

خط d_2 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه $A'OA''$ است یعنی: $\hat{O}_2 = \hat{O}_3$

$$\widehat{AOA''} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \xrightarrow[\hat{O}_2 = \hat{O}_3]{\hat{O}_1 = \hat{O}_2} \widehat{AOA''} = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_2$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA''} = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_2) \Rightarrow \widehat{AOA''} = 2\theta$$

ب) اندازه $\widehat{BOB''}$ و $\widehat{COC''}$ چقدر است؟

بنا بر اثبات الف به روش مشابه: $\widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = 2\theta$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر $\triangle ABC$ دانست؟ چه

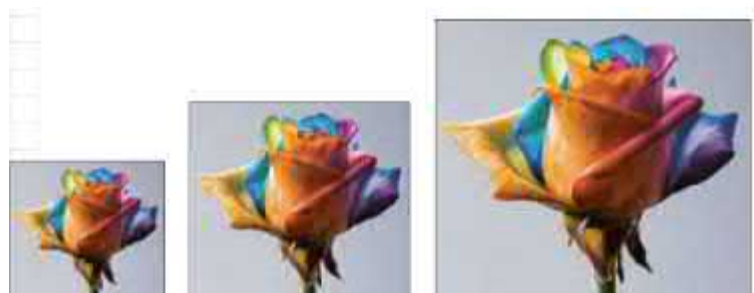
نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با دورانی به مرکز O نقطه‌ی برخورد دو خط بازتاب d_1 و d_2 و زاویه‌ای به اندازه‌ی دو برابر زاویه بین دو خط (2θ) می‌توان

مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث $\triangle ABC$ دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.

■ تجانس



در شکل‌های مشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازه همه پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را تجانس می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k \neq 1$ ، آن را نسبت تجانس (مقیاس) می‌نامیم. بزرگ یا کوچک می‌شود.

تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است:

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد؛

(الف) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

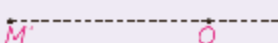
$$OM' = |k| \cdot OM \quad (ب)$$

– اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

$k = 2$  $OM' = 2 OM$ **مثال:**

$k = \frac{1}{2}$  $OM' = \frac{1}{2} OM$

– اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

$k = -2$  $OM' = 2 OM$ **مثال:**

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k ، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM ، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k \cdot OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطه M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطه O بین نقاط M و M' باشد و $OM' = |k| \cdot OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k و نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

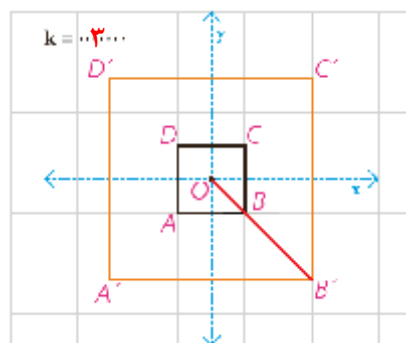
اگر در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k باشد آنگاه :

$$k > 0 \Rightarrow OM' = k \cdot OM \xrightarrow{\times \left(\frac{1}{k}\right)} \frac{1}{k} \cdot OM' = OM$$

$$k < 0 \Rightarrow OM' = |k| \cdot OM \xrightarrow{\times \left|\frac{1}{k}\right|} \left|\frac{1}{k}\right| \cdot OM' = OM$$

بنابراین نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است.

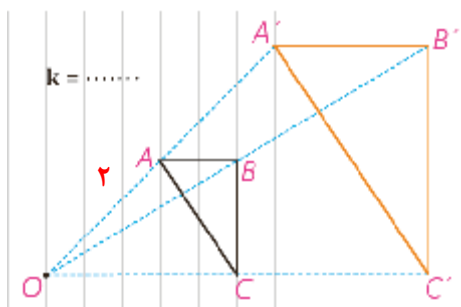
فعالیت



۱- این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.

(الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

با توجه به تعریف تجانس نقاط B و B' در یک طرف O قرار دارند پس $k > 0$



در نتیجه: $OB' = k.OB \Rightarrow k = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = 3$

$OC' = k.OC \Rightarrow k = \frac{OC'}{OC} \Rightarrow k = \frac{10}{5} \Rightarrow k = 2$

ب) آیا تجانس طولی است؟ چرا؟

خیر زیرا اندازه پاره خط ها حفظ نمی شود.

پ) در این شکل ها، طون هر پاره خط را با طون تصویر آن مقایسه کنید. به چه

نتیجه ای می توان رسید؟

در مربع: $A'B' = 3AB$, $B'C' = 3BC$, $C'D' = 3CD$, $D'A' = 3DA$

طول تصویر هر پاره خط ۳ برابر شده و درواقع این عدد همان نسبت تجانس است.

همچنین محیط شکل نیز ۳ برابر می شود.

$A'B' = 3AB$, $B'C' = 3BC$

در مثلث: $AC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $A'C' = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow A'C' = 2AC$

طول تصویر هر پاره خط ۲ برابر شده و درواقع این عدد همان نسبت تجانس است.

همچنین محیط شکل نیز ۲ برابر می شود.

ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

در مثلث: $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \times 6}{\frac{1}{2} \times 2 \times 3} = 4 = 2^2$

در مربع: $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{36}{4} = 9 = 3^2$

مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس است.

۲- در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی: $k > 1$.

حال مسئله را برای مفاد مختلف k بررسی می کنیم.

الف) در هر حالت مراحل باقی مانده را کامل کنید.

k	$k = 1$	$0 < k < 1$	$-1 < k < 0$
مثال			
k	$k = -1$	$k < -1$	
مثال			

پ) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت

را مشخص کنید:

طول/است	اندازه زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
$k > 1$	نادرست	درست	درست	نادرست
$k = 1$	درست	درست	درست	درست
$0 < k < 1$	نادرست	درست	درست	نادرست
$-1 < k < 0$	نادرست	درست	درست	نادرست
$k = -1$	درست	درست	درست	درست
$k < -1$	نادرست	درست	درست	نادرست

پ) شرط اینکه تجانس طولی باشد، این است که $k = 1$ یا $k = -1$ به عبارتی $|k| = 1$

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می‌کند، یعنی خطوط AA' ، BB'

و... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

این خطوط در مرکز تجانس یعنی نقطه O هم‌رسند.

در تجانس به مرکز O و نسبت k :

اگر $k > 0$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.

اگر $k < 0$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.

اگر $|k| < 1$ تصویر شکل **کوچک‌تر** می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.

اگر $|k| > 1$ تصویر شکل **بزرگ‌تر** می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

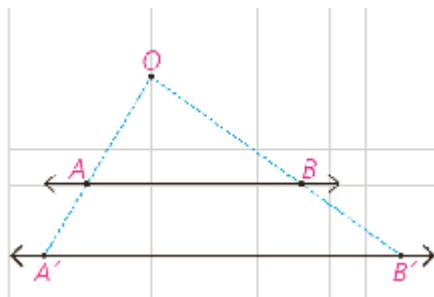
حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D ، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) نقطه O روی خط AB است.

حل: در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B ، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.



ب) نقطه O غیر واقع بر خط AB است.

حل: در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

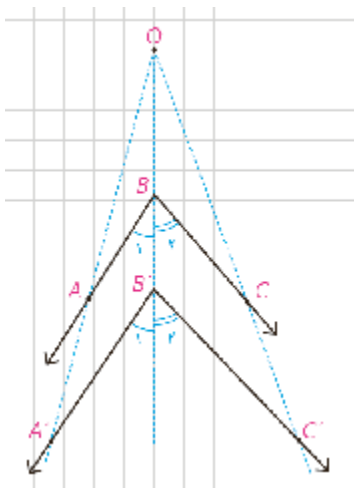
$$\begin{cases} OA' = k \cdot OA \\ OB' = k \cdot OB \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k.$$

$\Rightarrow AB \parallel A'B'$ (چرا؟) بنا بر عکس قضیه تالس

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین:

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می کند.

فعالیت



می خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازه زاویه را حفظ می کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه $\widehat{ABC}$ را در نظر می گیریم.

مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می کنیم.

به کمک قضیه قبل و شکل داده شده، ثابت کنید: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

با توجه به شکل و قضیه قبل داریم:

(۱) $\widehat{B}_1 = \widehat{B}'_1$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا بر قضیه خطوط موازی

(۲) $\widehat{B}_2 = \widehat{B}'_2$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا بر قضیه خطوط موازی

در نتیجه از جمع دو طرف رابطه ی (۱) و (۲) داریم: $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{B}'_1 + \widehat{B}'_2 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

نتیجه این فعالیت را در قالب قضیه زیر مطرح می کنیم:

قضیه: تجانس، اندازه زاویه را حفظ می کند.

گارد رگلاس

۱- الف) فرض کنید پاره خط $A'B'$ مجانس پاره خط AB در تجانس به مرکز

و نسبت k باشد؛ نشان دهید: $\frac{A'B'}{AB} = k$

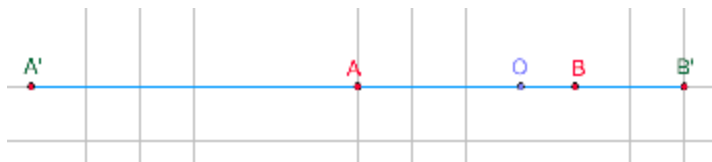
(۱) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه:

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{\frac{OA' = k \cdot OA}{OB' = k \cdot OB}} A'B' = k \cdot OA + k \cdot OB = k \cdot (OA + OB) \Rightarrow A'B' = k \cdot AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



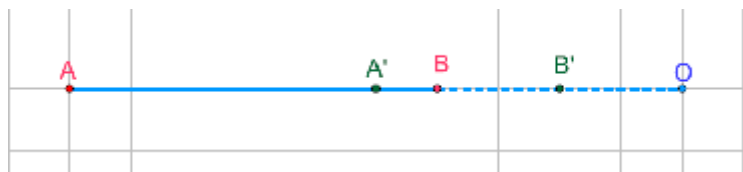
(۲) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{OA' = k.OA, OB' = k.OB} A'B' = k.OA + k.OB = k(\underbrace{OA + OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



(۳) در این حالت نقطه O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{OA' = k.OA, OB' = k.OB} A'B' = k.OA - k.OB = k(\underbrace{OA - OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



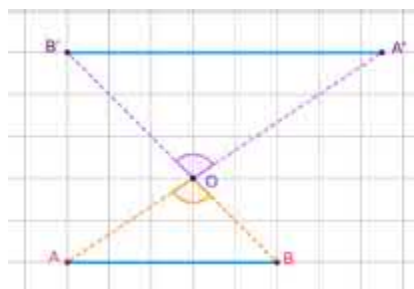
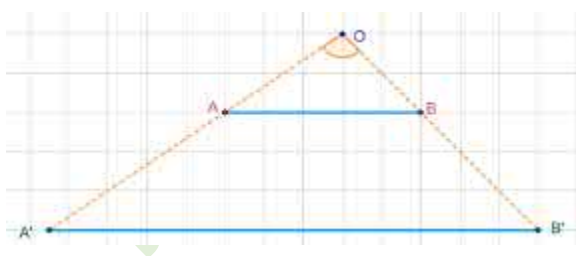
(۴) در این حالت نقطه O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{OA' = |k|.OA, OB' = |k|.OB} A'B' = |k|.OA - |k|.OB = |k|(\underbrace{OA - OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



(۵) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$\left. \begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$



(۶) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$\left. \begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث}} \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \\ \xrightarrow{\widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k \end{array} \right.$$

ب) اگر n ضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو n ضلعی با هم متشابه اند.

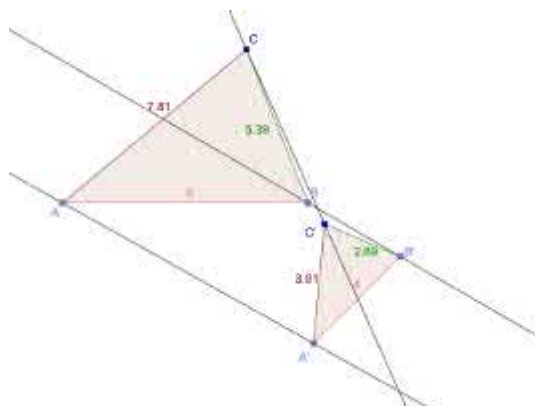
فرض کنیم $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ یک n ضلعی و نقطه ی O مرکز تجانس و k نسبت تجانس باشد

و چند ضلعی $A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$ مجانس آن باشد بنا بر تعریف تجانس داریم :

$$\left. \begin{aligned} OA'_1 &= |k| OA_1 \\ OA'_2 &= |k| OA_2 \\ OA'_3 &= |k| OA_3 \\ &\vdots \\ OA'_n &= |k| OA_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{OA'_2}{OA_2} = \frac{OA'_3}{OA_3} = \dots = \frac{OA'_n}{OA_n} = |k|$$

پس چون اضلاع همه متناسب هستند بنا بر قضیه ۳ تشابه نتیجه می گیریم که این دو چند ضلعی متشابه اند.

۲- با توجه به ویژگی های تجانس و به کمک منال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.



کافی است که دو شکل متشابه رسم کنیم که وقتی هر نقطه را به تصویرش وصل می کنیم و امتداد می دهیم همرس نشوند. به این ترتیب مرکز تجانس وجود نخواهد داشت و در این صورت تجانسی هم در کار نیست.

در شکل مقابل مثلث های ABC و $A'B'C'$ متشابه اند اما متجانس نیستند

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$ ؛ این نقاط را نقاط **ثابت** **تبدیل** نامیدیم. اما برخی از تبدیل ها، هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند؛ چنین تبدیل هایی را تبدیل همانی می نامیم.

تعریف: تبدیل T را **تبدیل همانی** گوییم، هر گاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل های همانی را با I نمایش می دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A ، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

انتقال زمانی همانی است که بردار انتقال برابر با بردار صفر باشد.

دوران زمانی تبدیل همانی است که زاویه دوران صفر درجه یا ۳۶۰ درجه باشد.

تجانس زمانی تبدیل همانی است که در آن $k=1$.

ب) آیا تبدیل همانی طولیاست؟

بله تبدیل همانی یک تبدیل طولی است زیرا هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می‌کند.

اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند و تحت یک تبدیل همانی بخواهیم تصویر آن‌ها را بیابیم داریم:

$$T(A) = A, T(B) = B \Rightarrow AB = AB$$

ب) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل

داشت؟

۱- انتقال غیرهمانی:

خیر نمی‌توان نقاط ثابت داشت یا به عبارتی هر نقطه باید تحت یک بردار غیر صفر در صفحه بلغزد و نمی‌تواند بر روی خودش بلغزد.

۲- دوران غیرهمانی:

اگر نقطه‌ی مورد نظر روی مرکز دوران باشد تحت هر دورانی ثابت می‌ماند. پس مرکز دوران نقطه‌ی ثابت تبدیل است.

۳- تجانس غیرهمانی:

اگر نقطه مورد نظر روی مرکز تجانس باشد تصویرش روی خودش قرار می‌گیرد. پس مرکز تجانس نقطه‌ی ثابت تبدیل است.

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

طول پاره خط را حفظ می کند.	اندازه زاویه را حفظ می کند.	شیب خط را حفظ می کند.	جهت شکل را حفظ می کند.	مساحت شکل را حفظ می کند.	
درست	درست	نادرست	نادرست	درست	بازتاب
درست	درست	درست	درست	درست	انتقال
درست	درست	نادرست	درست	درست	دوران
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	تجانس



۱- در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می کند.

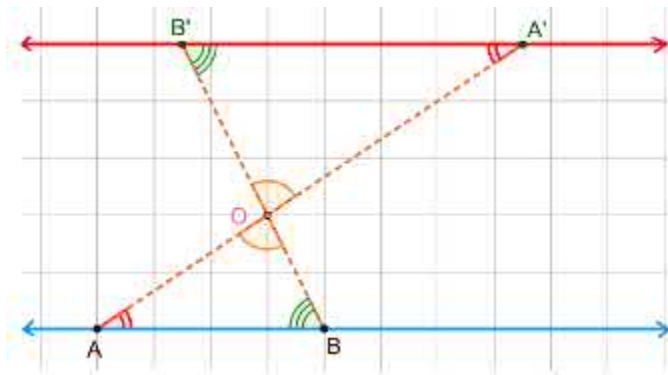
(۱) درحالتی که نقطه O روی خط AB قرار دارد و $k < 0$ بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس های نقاط A و B

روی خط AB واقع می شوند؛ بنا براین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب تغییر نمی کند.

(۲) در حالتی که نقطه O روی خط AB قرار ندارد و $k < 0$ در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب ، مجانس های

نقاط A و B باشند ، طبق تعریف داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \quad \left. \begin{array}{l} \text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث} \\ \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle AOB \sim \triangle A'OB' \Rightarrow \widehat{OB'A'} = \widehat{OBA}, \widehat{OA'B'} = \widehat{OAB}$$



پس بنا برعکس قضیه خطوط موازی خط AB موازی خط $A'B'$ است . و شیب خط ها در صورت وجود باهم برابر است.

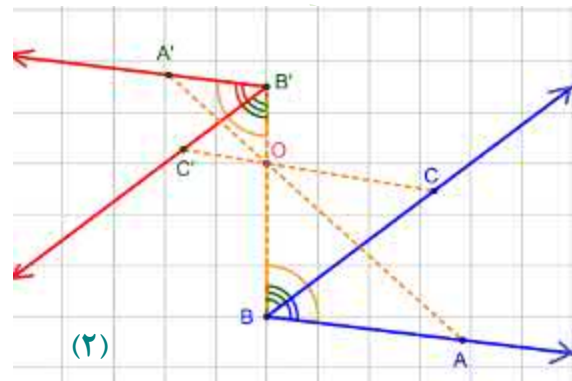
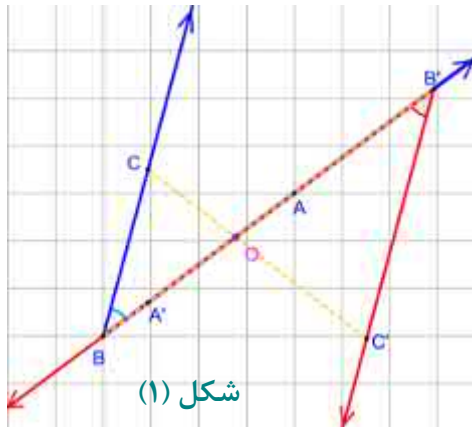
ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

زاویه $\widehat{ABC}$ را در صفحه در نظر می گیریم :

(۱) اگر نقطه O روی رأس زاویه یعنی نقطه B باشد آنگاه مجانس زاویه یعنی $\widehat{A'BC'}$ روی خود $\widehat{ABC}$ منطبق می شود. پس اندازه ی آن حفظ می شود.

(۲) اگر نقطه O روی یکی از اضلاع باشد مانند شکل (۱) آنگاه با توجه به قضیه، تجانس شیب خط را حفظ می کند پس:

$$BC \parallel B'C', BB' \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$



(۳) اگر نقطه O نه روی اضلاع و نه روی رأس زاویه باشد مانند شکل (۲) با توجه به بند قبلی، تجانس شیب خط را حفظ می کند پس :

$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel B'C', BB' \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{CBB'} = \widehat{C'B'B} \\ AB \parallel A'B', BB' \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABB'} - \widehat{CBB'} = \widehat{A'B'B} - \widehat{C'B'B} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

۲- دایره $C(O, R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را

نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید.

$$\text{الف) } k=2 \quad \text{ب) } k=-2 \quad \text{پ) } k=\frac{1}{4}$$

