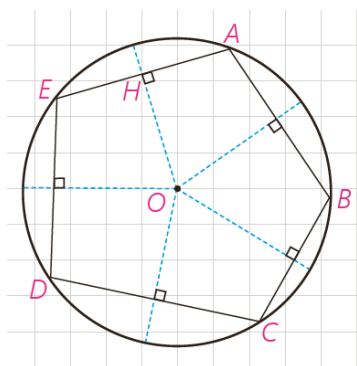


چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

چند ضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را دایره محیطی آن چند ضلعی می‌نامیم.

به‌طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین:



یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رأس باشند.

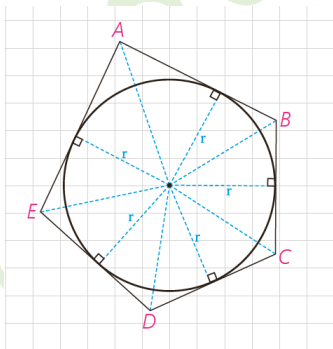
چرا؟ این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

فرض: چند ضلعی محاطی است. **حکم:** عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رسند.

باتوجه به تعریف چند ضلعی محاطی و فرض واضح است که فاصله ی همه ی رأس‌های چند ضلعی تا مرکز دایره به یک اندازه است (شعاع دایره) در نتیجه بنا بر خاصیت عمود منصف فاصله مرکز دایره از دوسر هر ضلع به یک فاصله (شعاع دایره) است، پس مرکز دایره روی عمود منصف این اضلاع قرار دارد. در نتیجه عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های آن در یک نقطه (مرکز دایره) هم‌رسند.

فرض: عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های چند ضلعی در یک نقطه هم‌رسند. **حکم:** چند ضلعی محاطی است.

باتوجه به فرض و خاصیت عمود منصف همه ی رأس‌های چند ضلعی از نقطه ی هم‌رسی عمود منصف‌ها به یک فاصله اند و در نتیجه این نقاط بنا بر تعریف دایره، روی دایره‌ای به شعاع این فاصله ی ثابت قرار دارند و بنا بر تعریف چند ضلعی محاطی این چند ضلعی محاطی است.

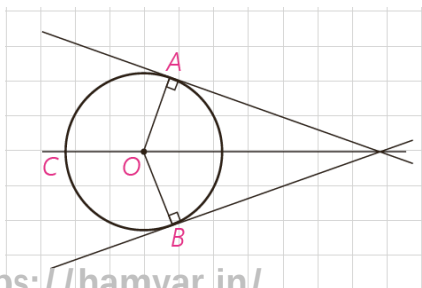


چند ضلعی را محیطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایره محیطی این چند ضلعی می‌نامیم.

فعالیت

فرض کنید دایره C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.
(الف)

۱- پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند، رسم کنید و آنها را OA و OB بنامید.



۲- پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی است؟

شعاع‌های دایره‌اند.

۳- فاصله نقطه O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های

رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

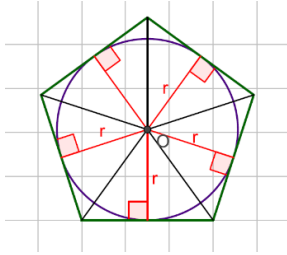
باهم برابرند. زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

۴- با توجه به (۲) و (۳) فاصله مرکز دایره از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و

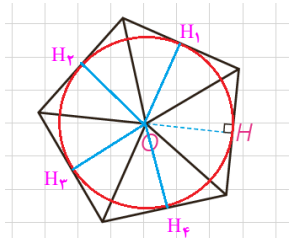
بنابراین نقطه O روی نیمساز زاویه است.

۵- فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا

مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟



بنا به تعریف چند ضلعی محاطی، اضلاع چند ضلعی بر دایره مماس هستند و می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس این شعاع‌ها همان فاصله‌ی مرکز دایره از اضلاع چند ضلعی هستند و همگی با هم برابرند. بنا بر خاصیت نیمساز مرکز این دایره روی نیمساز هر یک از زاویه‌های داخلی چند ضلعی است به عبارتی مرکز دایره محل برخورد نیمسازهای داخلی چند ضلعی است.



(ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای

زاویه‌های داخلی آن در نقطه O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک

ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه

نوع دایره‌ای است؟ چرا؟

نقطه O روی نیمساز زاویه‌های داخلی است پس بنا بر خاصیت نیمسازها: $OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$

همچنین OH_1 و OH_2 و OH_3 و OH_4 همگی بر اضلاع عمود هستند. در نتیجه وقتی دایره‌ای به شعاع OH رسم می‌کنیم شعاع‌ها بر اضلاع عمود هستند پس اضلاع بر دایره در نقطه تماسشان عمودند یعنی دایره بر اضلاع چند ضلعی مماس است در نتیجه بنا به تعریف دایره محاطی است.

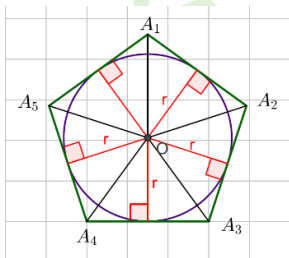
بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کاردکلاس

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر

r باشد، نشان دهید $S = rp$.

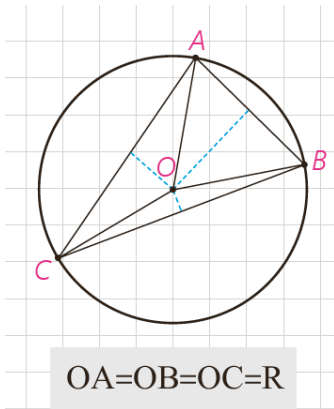
راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.



$$S = \frac{1}{2}r.A_1A_2 + \frac{1}{2}r.A_2A_3 + \frac{1}{2}r.A_3A_4 + \frac{1}{2}r.A_4A_5 + \dots + \frac{1}{2}r.A_{n-1}A_n$$

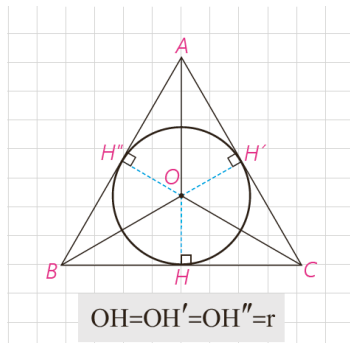
$$= \frac{1}{2}r(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n) = \frac{1}{2}r \times 2P \Rightarrow S = rp$$

■ دایره‌های محیطی و محاطی مثلث



قبلاً هم‌رسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه هم‌رسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.

همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث هم‌رس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه هم‌رسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز $S=pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.

اگر نیمساز زاویه A از $\triangle ABC$ را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است؛ چرا؟

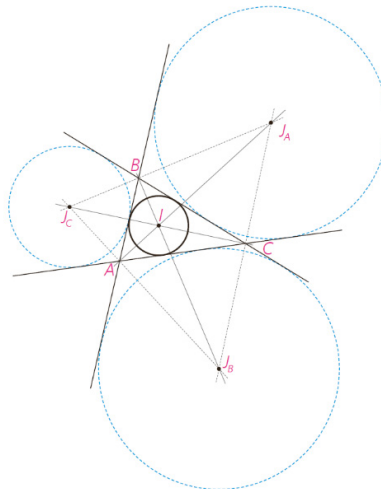
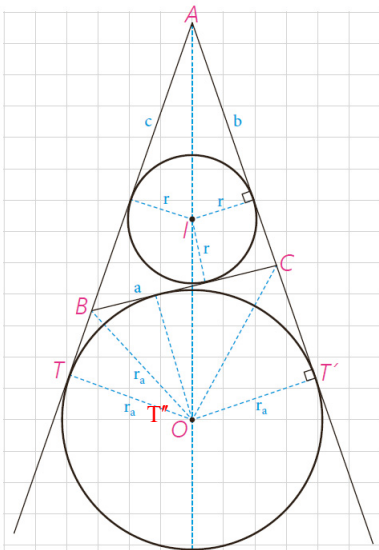
نقطه O روی نیمساز زاویه A است پس $OT=OT'$ (۱)

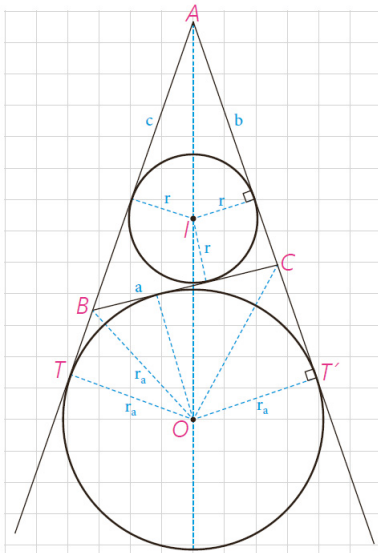
نقطه O روی نیمساز زاویه خارجی C است پس $OT''=OT'$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $OT''=OT$ پس نقطه O روی نیمساز زاویه خارجی B نیز هست. به عبارتی این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است.

بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.

شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.





اکنون در فعالیت زیر محاسبه شعاع دایره محاطی خارجی را بررسی می کنیم.

در شکل داریم: $S(ABC) = S(OAC) + S(OAB) - S(OBC)$ اگر مساحت

ΔABC را به S نشان دهیم، $S = \frac{1}{2} r_a (b + c - a)$. اگر محیط مثلث را با $2p$

نشان دهیم، داریم، $2p = a + b + c$ ؛ پس $2p - 2a = a + b + c - 2a = b + c - a$

در نتیجه $S = r_a(P - a)$ و بنابراین $r_a = \frac{S}{p - a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

$$r_b = \frac{S}{p - b} \quad r_c = \frac{S}{p - c}$$

برخلاف مثلث، همه چند ضلعی های دیگر، لزوماً محاطی یا محیطی نیستند. در بخش

بعد به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهار ضلعی می پردازیم.

■ چهار ضلعی های محاطی و محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

اثبات

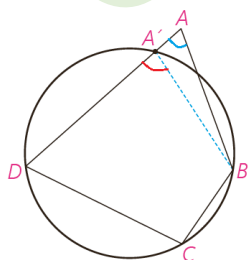
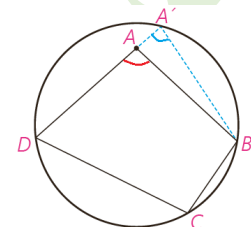
۱- فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد؛ مجموع اندازه های $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ نصف مجموع اندازه های کمان های DCB و DAB است؛ اما مجموع اندازه های این دو کمان 180° است و در نتیجه مجموع اندازه های $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ برابر 180° است. به همین ترتیب $\hat{B}$ ، $\hat{D}$ مکمل اند.

۲- فرض کنیم $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است. از سه نقطه B، C و D همواره یک دایره می گذرد؛ چرا؟

زیرا عمود منصف های اضلاع یک مثلث همسرند و مرکز دایره ی محیطی هر چندضلعی نقطه همرسی عمود منصف های اضلاع است.

اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه ای دیگری مانند A' قطع می کند که A' بین A و D یا D بین A' و A است. اکنون چهارضلعی $A'BCD$ محاطی است؛ پس $\hat{C}$ و $\widehat{BA'D}$ مکمل اند؛ در نتیجه باید $\hat{A}$ و $\widehat{BA'D}$ هم اندازه باشند و این ممکن نیست؛ چرا؟

زیرا در هر مثلث هر زاویه خارجی از زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگ تر است. در نتیجه A' همان A است.



قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

اساس اثبات بر این است که اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم اندازه‌اند.

اثبات

۱- اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

$$AB + CD = AM + MB + PC + PD = AQ + BN + CN + DQ = AQ + DQ + BN + CN = AD + BC$$

عکس این قضیه نیز با برهان خلف ثابت می‌شود.

۲- فرض کنید: $AB + CD = BC + AD$.

نیمسازهای دوزاویه B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطه I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟ ($IM = IN = IP$)

نقطه I روی نیمساز زاویه B است پس $IM = IN$ (۱)

نقطه I روی نیمساز زاویه C است پس $IP = IN$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $IP = IN = IM$ پس نقطه I از سه ضلع CD، BC و AB به یک فاصله است.

چرا دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟

زیرا این شعاع‌ها در نقاط اشتراک با دایره بر آن عمود هستند.

حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.

اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می‌شود.

پس، $AB + EC = AE + BC$ ؛ (چرا؟)

چهارضلعی ABCE محیطی است پس بنا بر بند (۱) همین قضیه نتیجه می‌گیریم: $AB + CE = AE + BC$

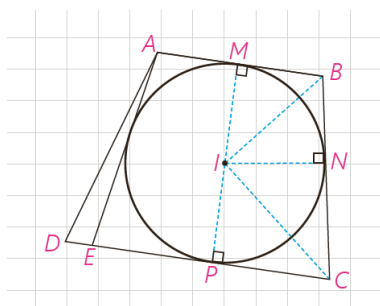
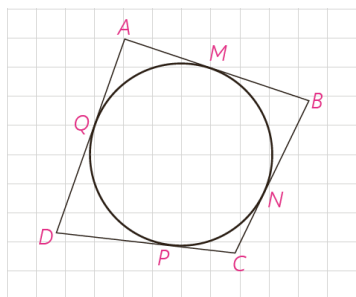
از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می‌گیرید: $AD = DE + AE$ ؟

$$\left. \begin{array}{l} AB + CD = AD + BC \\ AB + CE = AE + BC \end{array} \right\} \Rightarrow CD - CE = AD - AE \Rightarrow CD - CE + AE = AD \Rightarrow DE + AE = AD$$

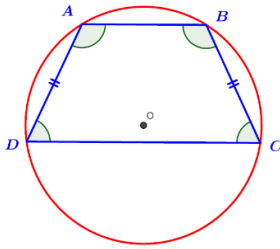
این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟)

بنا بر نامساوی مثلثی در مثلث ADE داریم: $DE + AE > AD$ پس رابطه‌ی فوق امکان ندارد؛ مگر این که E همان D باشد.

پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.



با توجه به این قضیه‌ها بررسی کنید که چهار ضلعی‌های دوزنقه، کایت، متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع کدام محاطی، و کدام محیطی است. دوزنقه متساوی الساقین چگونه؟

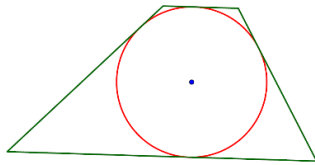


دوزنقه در حالت کلی محاطی نیست زیرا زوایای مقابل آن مکمل نیستند. اما اگر دوزنقه متساوی الساقین باشد داریم:

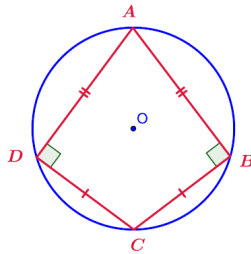
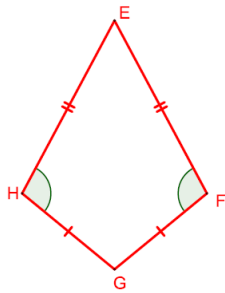
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C} = \hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A} = \hat{B}} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{دوزنقه } ABCD \text{ محاطی است}$$

یک دوزنقه در حالت کلی محیطی نیست اما می‌تواند محیطی باشد به شرط آن که نیمسازهای داخلی هم‌مس باشند.

مانند شکل مقابل:



یک کایت در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه مقابل آن قائمه باشند می‌تواند محاطی باشد.

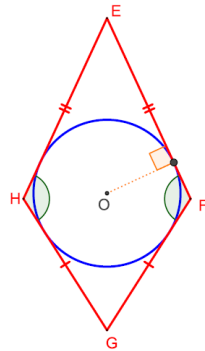


$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \xrightarrow{\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

پس بنا بر قضیه کایت ABCD محاطی است.

یک کایت حتماً محیطی است زیرا مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} EF = EH \\ GH = GF \end{array} \right\} \Rightarrow EF + GH = EH + GF$$



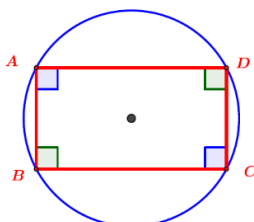
یک متوازی‌الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست؛ زیرا:

زاویه‌های مقابل نمی‌توانند مساوی 180° باشند.

$$\hat{A} + \hat{C} < 180^\circ, \hat{B} + \hat{D} > 180^\circ$$

یک متوازی‌الاضلاع در حالت کلی محیطی نیست؛ زیرا اضلاع مقابل دو به دو برابرند و مجموع آن‌ها با هم برابر نیست.

با توجه به شکل فوق: $AB + DC < AD + BC$.



یک مستطیل محاطی است؛ زیرا مجموع زاویه‌های مقابل همیشه برابر با 180° است.



یک مستطیل محیطی نیست زیرا اضلاع مقابل برابرند و مجموع آن ها باهم برابر نیست
با توجه به شکل: $AB + DC < AD + BC$

یک لوزی محاطی نیست؛ زیرا مجموع زاویه های مقابل 180° نیست.
یک لوزی محیطی است؛ زیرا مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

یک مربع هم می تواند محیطی و هم محاطی باشد. زیرا هم مجموع زاویه های مقابل 180° است و هم مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

از دیگر چندضلعی های محاطی و محیطی، چند ضلعی های منتظم است.

یک چند ضلعی محدب را منتظم می نامند، هرگاه تمام ضلع های آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز هم اندازه باشند.

مثلت متساوی الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

در فعالیت زیر نشان می دهیم هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است:

فعالیت

فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم $ABCD \dots$ ، 2α باشد؛ عمود
منصف های دو ضلع AB و BC را رسم می کنیم. فرض کنیم در O متقاطع اند. بنابراین
 $OA = OB = OC$

پس $\triangle OAB \cong \triangle OBC$ چرا؟

دو مثلث به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند.

$$\widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} \xrightarrow{\widehat{OBA} = \widehat{OBC}} 2\alpha = 2\widehat{OBA}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$$

اکنون از D به O وصل می کنیم. چرا اندازه $\widehat{OCD}$ برابر α است؟ چرا

$\triangle OAB \cong \triangle OBC$ و $OA = OB = OC = OD$ ؟

$$\widehat{BCD} = \widehat{OCB} + \widehat{OCD} \Rightarrow 2\alpha = \alpha + \widehat{OCD} \Rightarrow \widehat{OCD} = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} OC = OC \\ BC = DC \\ \widehat{OCD} = \widehat{OCB} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OCD \cong \triangle OCB \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} OD = OB$$

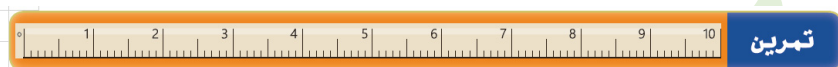
$$\left. \begin{array}{l} OD = OB \\ OA = OB = OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

با ادامه این روند داریم :

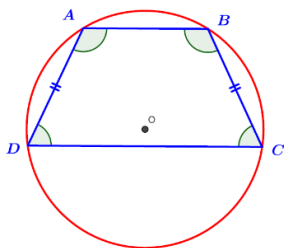
$OA=OB=OC=OD=\dots\dots$ و $OH=ON=OM=\dots\dots$ بنابراین، O از همه

رأس‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.



تمرین



۱- ثابت کنید یک دوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

فرض : دوزنقه متساوی الساقین است. **حکم :** دوزنقه محاطی است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{دوزنقه } ABCD \text{ محاطی است}$$

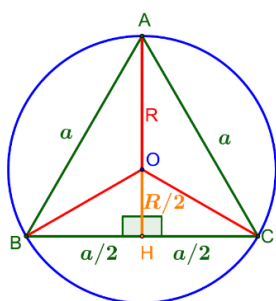
فرض : دوزنقه محاطی است. **حکم :** دوزنقه متساوی الساقین است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ AB \parallel DC, AD \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \hat{A} = \hat{B}$$

در این دوزنقه زاویه های مجاور به ساق برابرند در نتیجه دوزنقه متساوی الساقین است .

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R

محاط شده باشد.



مرکز دایره ی محیطی نقطه O محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی الاضلاع است نقطه O محل برخورد میانه هاهم هست. بنا براین :

راه اول :

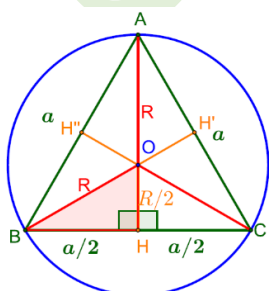
$$AB = BC = AC = a, \quad BH = CH = \frac{a}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} OH = \frac{OA}{2} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R \\ \Delta ACH : H = 90^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}R \Rightarrow a = \frac{3R}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = R\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(R\sqrt{3})^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

راه دوم: باتوجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث همنهشت ساخته شده است . این مثلث های به حالت (ض ز ض)

همنهشت هستند.



$$\Delta OBH : H = 90^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

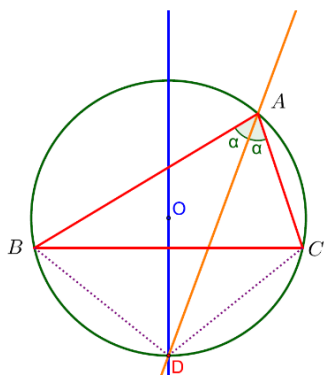
$$S_{ABC} = 6S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{R}{2} \times \frac{R}{2} \sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.

فرض کنیم نیمساز زاویه BAC دایره محیطی را در نقطه D قطع کند:

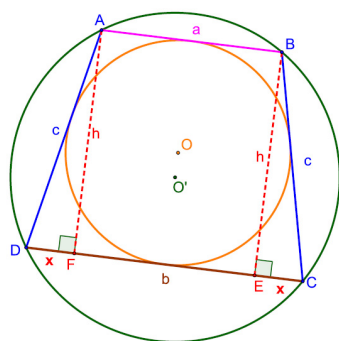
$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \xrightarrow{\text{محاطی}} \widehat{BD} = \widehat{CD} \xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}} BD = CD$$

فاصله نقطه D از دو نقطه B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمود منصف نقطه D روی عمود منصف پاره خط BC نیز قرار دارد.



۴- یک دوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

چون دوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع دیگر برابر است. در نتیجه: $2c = a + b$ و مثلث ADF قائم الزویه است.



$$2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}, \quad b = 2x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \times h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab}$$

۵- اگر r_a, r_b, r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی

داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$S = rp \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$$

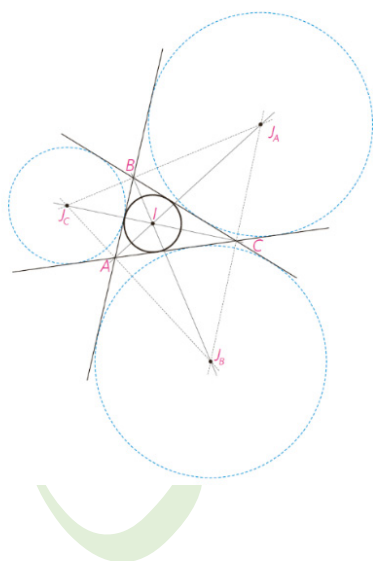
$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p - (a+b+c)}{S} = \frac{3p - 2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$



به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \\ S &= \frac{1}{2} bh_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b} \Rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \\ S &= \frac{1}{2} ch_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M و N، P باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :

$$AM = AN = p - a$$

$$\left. \begin{aligned} AN &= c - BN \\ AM &= b - CM \end{aligned} \right\} \Rightarrow AM + AN = b + c - (BN + CM)$$

$$\xrightarrow[CM=CP, BN=BP]{AM=AN} 2AM = b + c - \underbrace{(BP + CP)}_a = b + c - a$$

$$2AM = 2p - 2a \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$$BN = BP = p - b$$

$$\left. \begin{aligned} BN &= c - AN \\ BP &= a - CP \end{aligned} \right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP)$$

$$\xrightarrow[AN=AM, CP=CM]{BP=BN} 2BN = a + c - \underbrace{(AM + CM)}_b = a + c - b$$

$$2BN = 2p - 2b \Rightarrow BN = BP = p - b$$

$$CM = CP = p - c$$

$$\left. \begin{aligned} CM &= b - AM \\ CP &= a - BP \end{aligned} \right\} \Rightarrow CM + CP = b + a - (AM + BP)$$

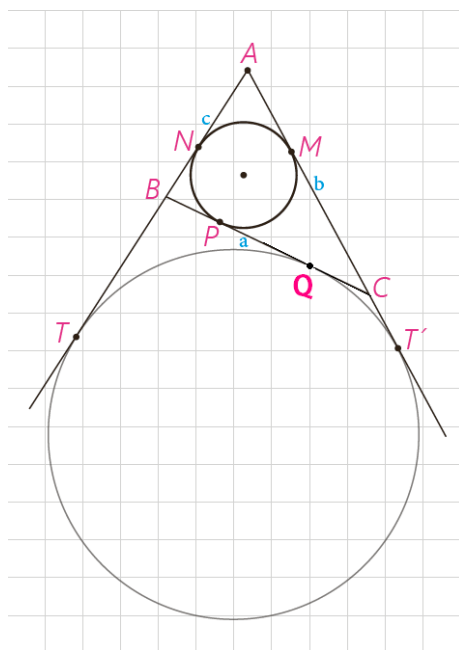
$$\xrightarrow[AN=AM, BP=BN]{CM=CP} 2CM = b + a - \underbrace{(AN + BN)}_c = b + a - c$$

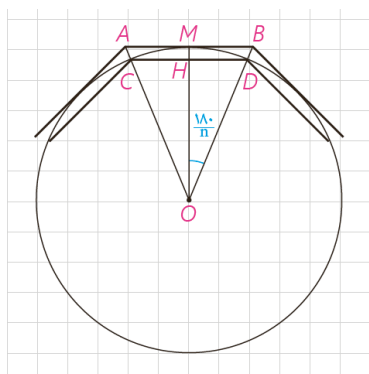
$$2CM = 2p - 2c \Rightarrow CM = CP = p - c$$

$$AT = AT' = p$$

$$AT + AT' = c + BT + b + CT' \xrightarrow[BT=BQ, CT'=CQ]{AT=AT'} 2AT = c + b + \underbrace{BQ + CQ}_a = c + b + a = 2p$$

$$\Rightarrow 2AT = 2p \Rightarrow AT = AT' = p$$





۷- یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن گاه $AB = 2r \tan \frac{18^\circ}{n}$ و $CD = 2r \sin \frac{18^\circ}{n}$.

$$\triangle OHD: \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{OD=r} \sin \frac{18^\circ}{n} = \frac{HD}{r} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin \frac{18^\circ}{n} = \frac{2HD}{r}$$

$$\xrightarrow{2HD=CD} CD = 2r \sin \frac{18^\circ}{n}$$

$$\triangle OMB: \hat{M} = 90^\circ \xrightarrow{OM=r} \tan \frac{18^\circ}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times 2} 2 \tan \frac{18^\circ}{n} = \frac{2MB}{r}$$

$$\xrightarrow{2MB=AB} AB = 2r \tan \frac{18^\circ}{n}$$

۸- شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی.

مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است. بنا بر این زاویه‌های خارجی

60° است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که

$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی الساقین است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

اگر قطرهای شش ضلعی منتظم را رسم کنیم آن را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم

می‌کنیم و در مثلث MNP ، ۹ مثلث همنهشت ایجاد می‌شود.

$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}} = \frac{6S_{MAB}}{9S_{MAB}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر

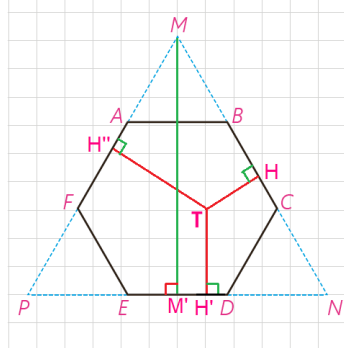
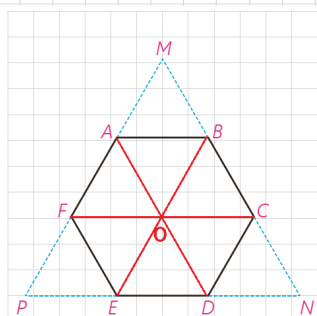
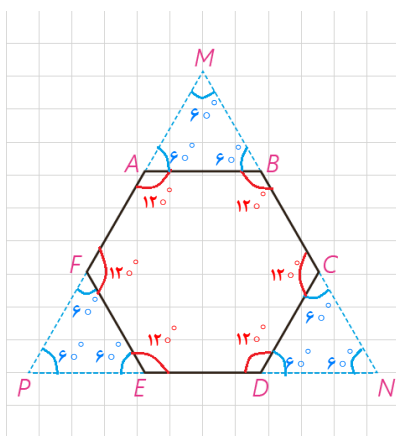
ED ، BC و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های

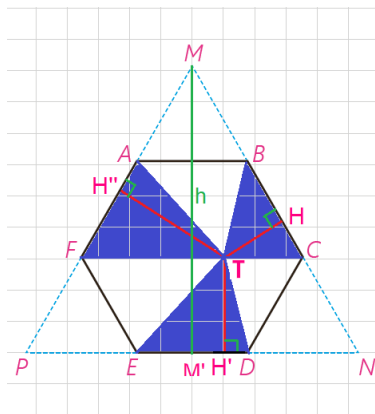
این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با

طول ارتفاع مثلث برابر است:

$$TH + TH' + TH'' = MM'$$





ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{3} AF \cdot TH'' + \frac{1}{3} DE \cdot TH' + \frac{1}{3} BC \cdot TH$$

$$\xrightarrow{AF=ED=BC=a} S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{3} a (TH'' + TH' + TH) = \frac{1}{3} ah$$

$$\Rightarrow S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{3} ah$$

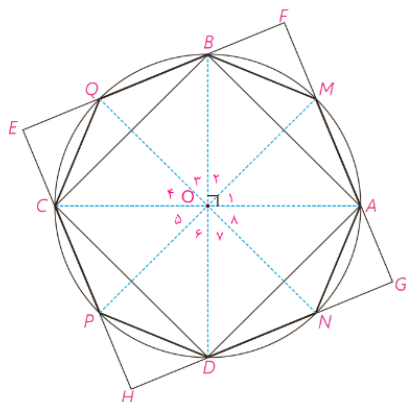
$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{3} MN \cdot h \xrightarrow{MN=3a} S_{\triangle MNP} = \frac{3}{3} a \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{1}{3} ah}{\frac{3}{3} a \cdot h} \Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{1}{3}$$

مساحت مثل‌های آبی رنگ $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش ضلعی $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث MNP مساحت مثلث

های سفید و آبی برابر با مساحت شش ضلعی است پس مساحت مثلث‌های سفید هم برابر با $\frac{1}{3}$ است بنا براین مساحت مثلث‌های آبی با مساحت مثلث‌های سفید برابر است.

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



۹- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی

ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره

را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.

در چهارضلعی ABCD قطر همدیگر را نصف می‌کنند و باهم برابرند پس مستطیل

است و چون قطر‌ها برهم عمودند نتیجه می‌گیریم که مربع است.

عمود منصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:

$$O_1 = O_2 = O_3 = O_4 = O_5 = O_6 = O_7 = O_8 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} = \widehat{BQ} = \widehat{QC} = \widehat{CP} = \widehat{PD} = \widehat{DN} = \widehat{NA}$$

$$\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$