

۸- در دایره $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$
 $(OH \text{ و } OH' \text{ فاصله } O \text{ از دو وتر } AB \text{ و } CD \text{ هستند.})$
 راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیه فیثاغورس استفاده کنید.

فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$

$$OB = OC = R, \quad BH = \frac{AB}{2}, \quad CH = \frac{CD}{2} \quad (1)$$

$$\triangle OBH : H = 90^\circ \Rightarrow BH^2 = R^2 - OH^2$$

$$\triangle OCH' : H' = 90^\circ \Rightarrow CH'^2 = R^2 - OH'^2$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \xrightarrow{(1)} BH > CH' \Rightarrow BH^2 > CH'^2$$

$$\Rightarrow R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \xrightarrow{\times(-1)} OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{\frac{OH^2 > 0}{OH'^2 > 0}} OH < OH'$$

فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$

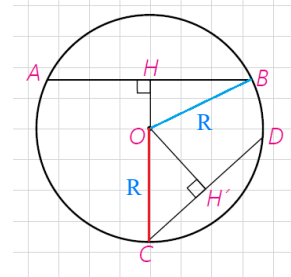
$$OB = OC = R, \quad 2BH = AB, \quad 2CH = CD \quad (1)$$

$$\triangle OBH : H = 90^\circ \Rightarrow OH^2 = R^2 - BH^2$$

$$\triangle OCH' : H' = 90^\circ \Rightarrow OH'^2 = R^2 - CH'^2$$

$$OH < OH' \Rightarrow R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2$$

$$\Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \xrightarrow{\times(-1)} BH^2 > CH'^2 \xrightarrow{\frac{BH^2 > 0}{CH'^2 > 0}} BH > CH' \xrightarrow{(1)} AB > CD$$



درس دوم

رابطه های طولی در دایره

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی نباشند، یکدیگر را برون یا روی یا درون دایره قطع می کنند. در هر حالت به بررسی روابط بین اندازه پاره خط های حاصل می پردازیم.

فعالیت

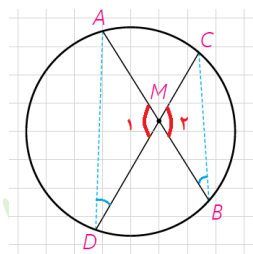
۱- دو وتر AB و CD در نقطه M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه اند.

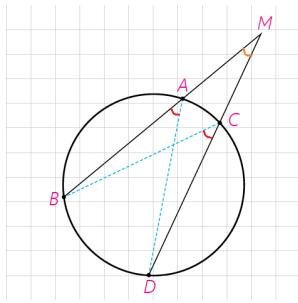
این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \quad \text{ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم:}$$

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM \quad \text{۱ و در نتیجه:}$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{D} = \hat{B} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \cong \triangle CMB$$



۲- دو وتر AB و CD در نقطه M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) نقطه A را به D و نقطه C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و

MCB باهم متشابه‌اند.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \cong \triangle CMB$$

ب) با توجه به تشابه فوق داریم: $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$

۲ و در نتیجه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

نتیجه ۲۹۱

هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره)

یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

۳- فرض کنیم از نقطه M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره

رسم کرده‌ایم.

الف) T را به A و B وصل نمایید و مشخص کنید چرا $\hat{MTA} = \hat{TBM}$ ؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{MTA} = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ ظلی} \\ \hat{TBM} = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{MTA} = \hat{TBM}$$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص کنید و با توجه به این تشابه

رابطه زیر را کامل نمایید.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{MTA} = \hat{TBM} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAT \cong \triangle MTB$$

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

و در نتیجه: $MT^2 = MA \cdot MB$

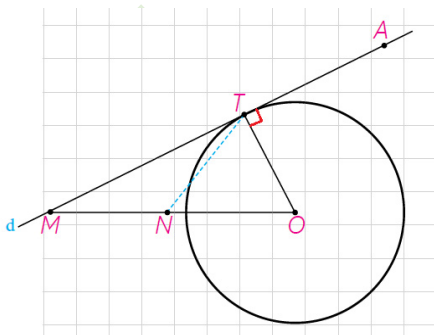
■ رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطه T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دو طرف

نقطه T باشند، هرکدام از پاره‌های MT و AT بر دایره مماس‌اند.

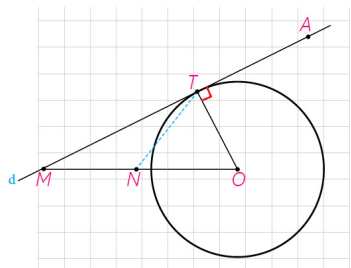
اگر O مرکز دایره باشد، $\triangle OMT$ در رأس T قائم‌الزاویه است. چرا؟

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.



با توجه به کادر فوق چون طبق فرض خط d در نقطه T بر دایره مماس است پس $OT \perp d$ در نتیجه مثلث OMT در رأس T قائم الزویه است.

اگر N وسط پاره خط OM باشد در نتیجه TN میانه ی مثلث قائم الزویه OMT است. «در هر مثلث قائم الزویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است.» (صفحه ۶۰ کتاب هندسه دهم). بنا براین $MN = NO = TN$.

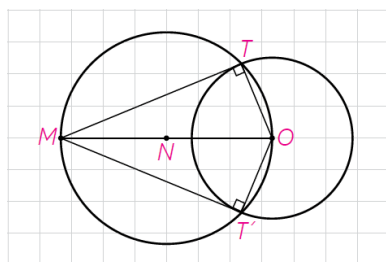


بنابراین دایره به مرکز N و قطر OM از نقطه T می گذرد.

از این ویژگی می توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.

اگر فاصله M تا O (مرکز دایره) d باشد، $MT = \sqrt{d^2 - R^2}$ چرا؟

$$\triangle MTO: \hat{T} = 90^\circ \Rightarrow MT^2 = OM^2 - OT^2 \Rightarrow MT = \sqrt{d^2 - R^2}$$



اکنون برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره، ابتدا دایره ای به قطر OM (مرکز O) دایره رسم می کنیم.

این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T' قطع می کند. خط های MT و MT' بر دایره مماس اند چرا؟

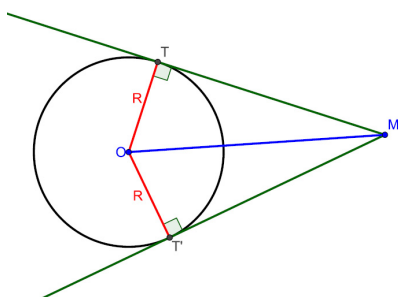
زاویه های $\hat{MTO}$ و $\hat{MT'O}$ محاطی روبه رو به قطر هستند بنا براین اندازه ی هر کدام

90° است. پس شعاع نقطه تماس بر پاره خط های MT و MT' عمود است.

در نتیجه MT و MT' بر دایره مماس هستند.

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

کادر کلاس



هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید:

الف) اندازه های دو مماس برابرند.

دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت

هستند. و بنا بر اجزای متناظر $MT = MT'$.

ب) نیم خط MO نیمساز زاویه $\angle TMT'$ است.

راه اول: دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت هستند. و بنا بر اجزای متناظر

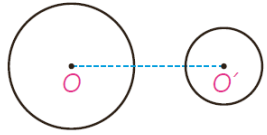
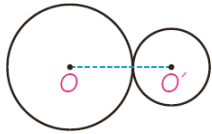
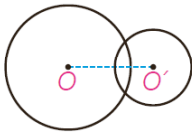
$$\hat{OMT} = \hat{OMT'}$$

راه دوم: فاصله نقطه O از دو ضلع زاویه $\angle TMT'$ به یک فاصله است پس بنا بر خاصیت نیمساز زاویه نقطه O روی نیمساز

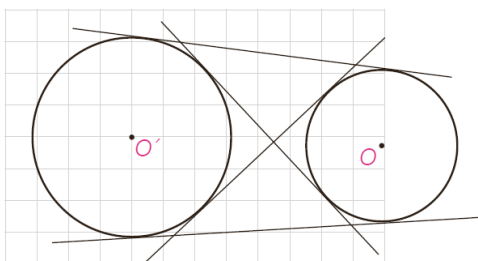
این زاویه است. یعنی نیم خط MO نیمساز زاویه $\angle TMT'$ است.

■ حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

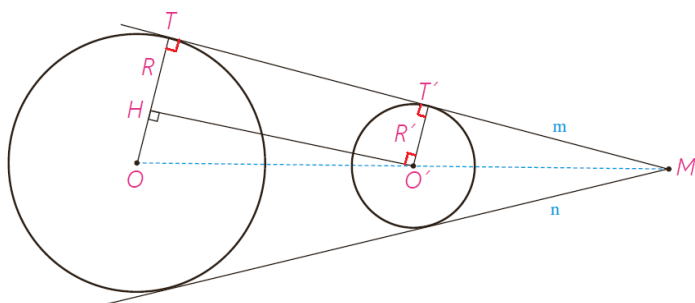
دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم‌مرکز

هر خطی یا پاره‌خطی را که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره می‌نامند.



۱- فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



شعاع‌های OT و $O'T'$ بر خط m در نقاط T و T' عمودند. و چون $O'H$ موازی خط m است پس بنا بر قضیه خطوط موازی $\hat{T} = \hat{H} = 90^\circ$ و $\hat{T}' = \hat{O}' = 90^\circ$

بنا بر این چهار ضلعی $TT'O'H$ چهار زاویه قائمه دارد پس مستطیل است.

(ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$ ، تساوی زیر را توجیه کنید.
 $OO' = d$ و $OT = R$ و $O'T' = R'$ و با توجه به بند الف $O'H = TT'$

$$\begin{aligned} \Delta O'O'H: \hat{H} = 90^\circ &\Rightarrow O'H^2 + OH^2 = OO'^2 \Rightarrow O'H^2 = OO'^2 - OH^2 \\ &\Rightarrow O'H = \sqrt{d^2 - (OT - O'T')^2} \xrightarrow{O'H=TT', OT=R, O'T'=R'} TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \end{aligned}$$

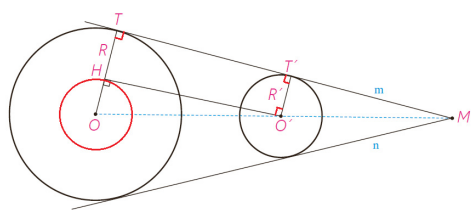
(پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع

باشند، نقطه تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

فرض کنیم این دو مماس مشترک در نقطه M یکدیگر را قطع کنند. با توجه به بند (ب) کار در کلاس قبل OM نیمساز زاویه M است. همچنین OM هم نیمساز زاویه M است و چون هر زاویه یک نیمساز دارد در نتیجه OM و OM بر هم منطبق هستند در نتیجه نقطه تقاطع مماس‌ها روی خط OO' قرار دارد.

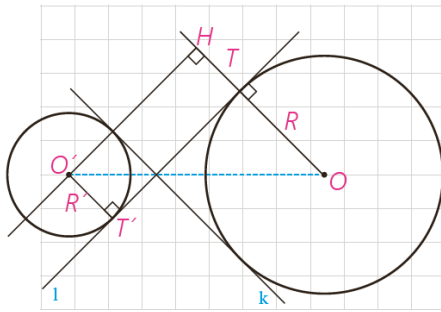
(ت) به مرکز O و به شعاع $R - R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره خط $O'H$ برای دایره رسم شده چگونه خطی است؟

پاره خط $O'H$ بر این دایره مماس است.



(ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می‌توان دایره مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را رسم کنید؟

از نقطه O به H وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره (C) را در نقطه T قطع کند. سپس از این نقطه خطی موازی $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه T' بر دایره (C) مماس می‌شود.

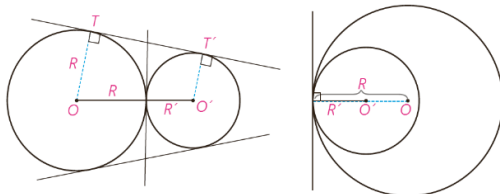


۲- دو مماس مشترک l و k نیز بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است
مرکزهای دو دایره در دوطرف مماس مشترک اند. با به کار بردن قضیه فیثاغورس در $\triangle O'OH$ مانند قبلی نشان دهید:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

با توجه به شکل چهارضلعی $THO'T'$ مستطیل است پس $TT' = OH$. همچنین
و در نتیجه: $OH = R + R'$ و $TH = O'T' = R'$

$$\triangle O'OH: H = 90^\circ \Rightarrow O'H^2 = OO'^2 - OH^2 \xrightarrow[\substack{OH=R+R', OO'=d}]{TT'=O'H} TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$



مماس خارج اند؛
سه مماس مشترک دارند.
 $OO' = R + R'$

مماس داخل اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
 $OO' = |R - R'|$

۳- دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می نامند.

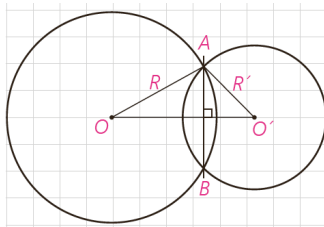
با استفاده از دستور محاسبه طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

$$\begin{aligned} TT' &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \xrightarrow{d=R+R'} TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} \\ \Rightarrow TT' &= \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - (R^2 + R'^2 - 2RR')} = \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR'} \\ \Rightarrow TT' &= \sqrt{4RR'} \Rightarrow TT' = 2\sqrt{RR'} \end{aligned}$$

۴- دو دایره متقاطع. دو دایره را که فقط دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

$$\text{و } |R - R'| < OO' < R + R' \text{؛ چرا؟}$$



$$OO' < R + R' \quad (1)$$

با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AOO' داریم:

$$\left. \begin{aligned} R' < OO' + R &\Rightarrow -OO' < R - R' \\ R < OO' + R' &\Rightarrow R - R' < OO' \end{aligned} \right\} \Rightarrow -OO' < R - R' < OO' \Rightarrow |R - R'| < OO' \quad (2)$$

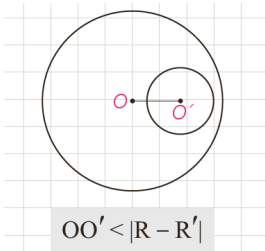
$$\xrightarrow{(1), (2)} |R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره خط AB ، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع

است. چرا پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است؟

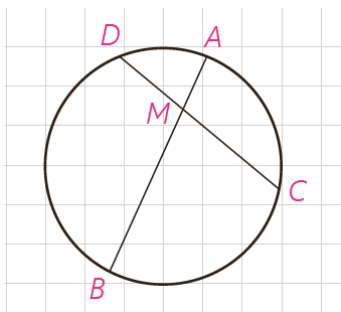
$OA = OB = R$ و $O'A = O'B = R'$ بنا بر خاصیت عمود منصف نقاط O و O' روی عمود منصف AB قرار دارد و چون

عمود منصف هر پاره خط یکتا است در نتیجه پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است.



$$OO' < |R - R'|$$

۵- دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$



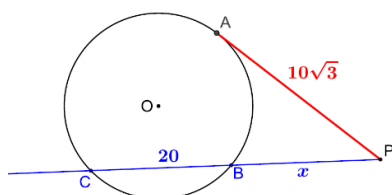
۱- در دایره $C(O, R)$ وتر AB و وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ ، آن گاه وتر CD و وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟

$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = 3 \Rightarrow MC = 6$$

$$DM \cdot MC = AM \cdot BM \xrightarrow{AM=x} 3 \times 6 = x(11-x) \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x-9)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, \quad x = 9 \quad \text{باتوجه به شکل غ ق ق}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{2}{9}$$

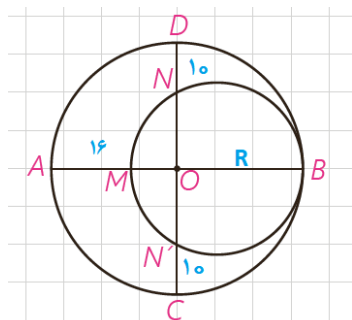


۲- از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول های PB و PC را به دست آورید.

$$PA^2 = PB \cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(x+20) \Rightarrow x^2 + 20x - 300 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+30) = 0 \Rightarrow x = 10, \quad x = -30 \quad \text{غ ق ق}$$

$$\Rightarrow PB = 10, \quad PC = 30$$



۳- در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ ، شعاع های دو دایره را پیدا کنید.

$$OB \cdot OM = ON \cdot ON' \Rightarrow R(R-16) = (R-10)(R-10)$$

$$\Rightarrow R^2 - 16R = R^2 - 20R + 100 \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

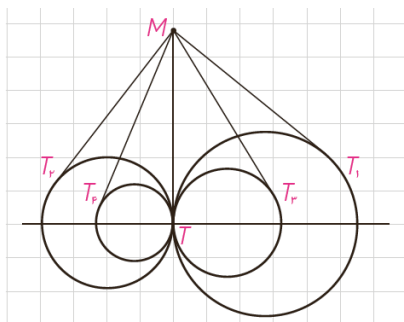
$$R' = \frac{MB}{2} \Rightarrow R' = \frac{2R-16}{2} \Rightarrow R' = \frac{50-16}{2} = 17$$

۴- مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T برهم مماس اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم؛ ثابت کنید

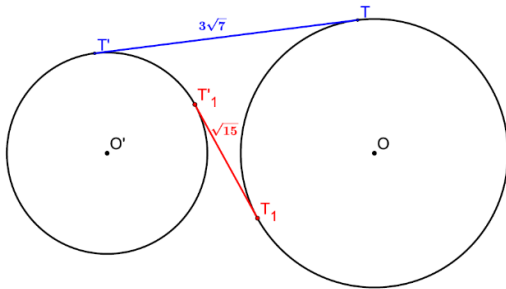
$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$

با توجه به کار در کلاس ص ۱۲ می دانیم که از هر نقطه خارج دایره طول مماس های رسم شده باهم برابرند. بنابراین داریم :

$$\left. \begin{array}{l} MT = MT_2 \\ MT = MT_4 \\ MT = MT_1 \\ MT = MT_3 \end{array} \right\} \Rightarrow MT = MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$$

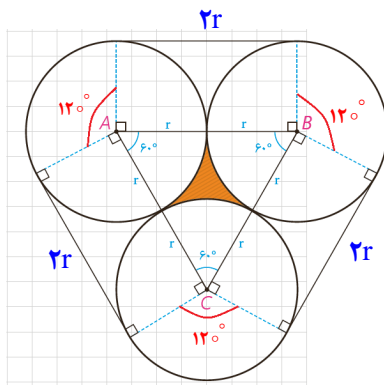


۵- طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المركزين آنها مساوی ۸ واحد است.



$$\begin{cases} TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \\ TT'^2 = d^2 - (R + R')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 63 = 64 - (R - R')^2 \\ 15 = 64 - (R + R')^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow R' = 3$$



۶- سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4})$ محدود است.

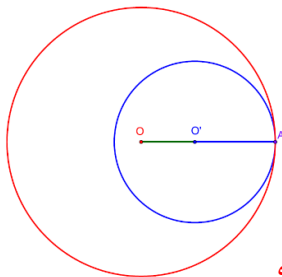
مجموع سه قطاع با زاویه 120° درجه تشکیل یک دایره کامل می دهد بنا براین داریم:

$$6r + 2\pi r = \text{محیط یک دایره} = 2\pi r + 2r + 2r + 2r \Rightarrow \text{طول نخ}$$

مجموع سه قطاع با زاویه 60° درجه تشکیل یک نیم دایره می دهد بنا بر این داریم:

مساحت نیم دایره - مساحت مثلث ABC = مساحت ناحیه هاشور خورده

$$\text{مساحت ناحیه هاشور خورده} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{4}r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$$



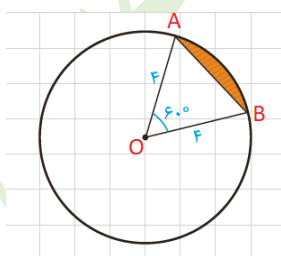
۷- طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتی مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه:

$$\text{مساحت ناحیه محدود بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 16$$

$$\xrightarrow{OO' = R - R' = 2} 2(R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8$$

$$\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases} \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5, R' = 3$$



۸- مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

مثلث OAB متساوی الساقین است که و $\hat{O} = 60^\circ$ پس این مثلث متساوی الاضلاع است. مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع 60° درجه = مساحت قسمت رنگی (A)

$$A = \frac{\pi r^2}{360} \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2 \Rightarrow A = \frac{16\pi}{360} \times 60 - 4\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$