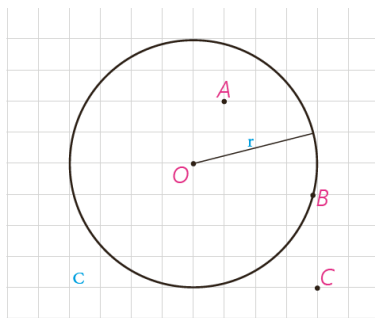


مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصله ثابت (اندازه شعاع دایره) هستند. معمولاً دایره $C(O, r)$ به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که:



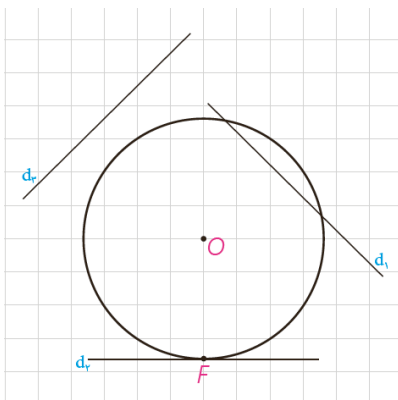
الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **برابر** به شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **بزرگ‌تر** از شعاع دایره است.

پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **کوچک‌تر** از شعاع دایره است.

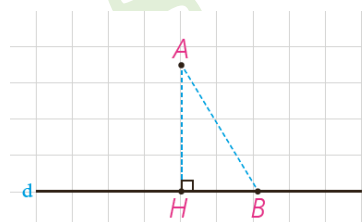
■ اوضاع نسبی خط و دایره

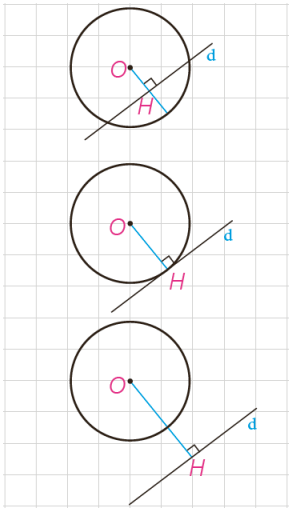
در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطه اشتراک داشته، و یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند. در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است و در حالتی که خط و دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند، خط و دایره را متقاطع می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.



یادآوری

اگر خط d و نقطه A غیر واقع بر d داده شده، و نقطه H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازه پاره خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصله نقطه A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است ($AB > AH$).





اگر d یک خط و $C(O, r)$ یک دایره و نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ($OH < r$)، خط و دایره ... در دو ... نقطه اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع اند

ب) اگر فاصله خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد ($OH = r$)، خط و دایره ... در یک ... نقطه اشتراک دارند؛ یعنی مماسند.

پ) اگر فاصله خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد ($OH > r$)، خط و دایره نقطه اشتراک ندارند.

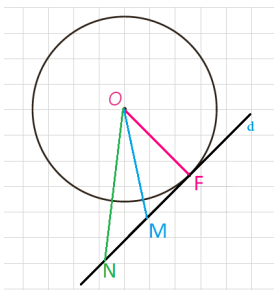
فعالیت

۱- فرض کنیم خط d بر دایره C در نقطه F مماس است.

الف) نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O کدام است؟ چرا؟

نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O نقطه F است. می‌دانیم طول $OF = R$ و هر نقطه دیگر از خط d خارج دایره است و با توجه به قسمت (پ) مطالب فوق فاصله ی آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟



در نقطه F قطع می‌کند. اگر فرض کنیم که در F قطع نکند پس نقطه ی دیگری مانند M وجود

دارد که OM بر خط d عمود است و M پای عمود است. نقطه ی دیگری مانند N روی خط d

هست که M بین N و F قرار دارد و $FM = MN$ در نتیجه :

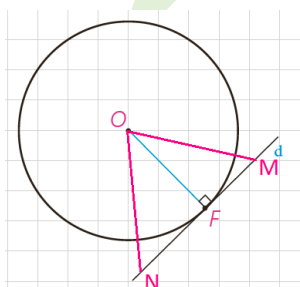
$$\left. \begin{array}{l} FM = MN \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OMN \cong \triangle OMF \Rightarrow ON = OF = R$$

بنابراین نقطه ی N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط d بر دایره تناقض دارد. پس خط مماس در نقطه F بر OF عمود است.

پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F بر هم عمودند.

ت) با توجه به قسمت (پ) اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خط مماس بر دایره در نقطه F را رسم کنید؟

با توجه به مطلب فوق کافی است خطی را که در نقطه F بر OF عمود می‌شود رسم کنیم. این خط مماس بر دایره می‌باشد.



۲- خط d در نقطه F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همه نقاط خط

d نسبت به دایره C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر

دایره مماس است.

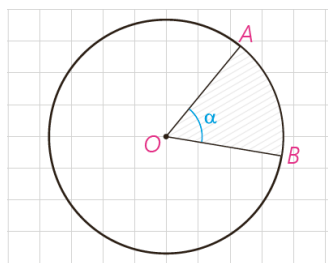
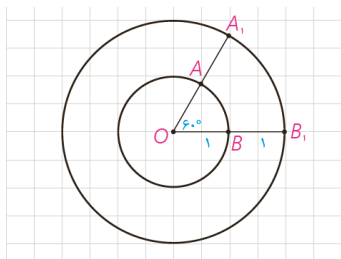
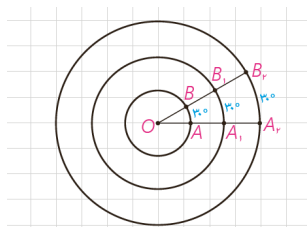
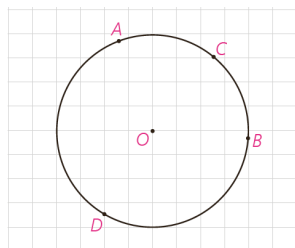
فرض کنیم M نقطه دیگری غیر از F روی خط d باشد چون $OM > OF$ در نتیجه

نقطه M برون دایره C است. بنا براین خط d با دایره C فقط یک نقطه مشترک دارد.

در نتیجه خط d بر دایره مماس است.

بنابراین :

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.



با تعاریف زوایای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

- ۱- شعاع دایره : پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.
- ۲- وتر دایره : پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.
- ۳- قطر دایره : وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.
- ۴- زاویه مرکزی : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.
- ۵- زاویه محاطی : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

۶- **کمان** : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\widehat{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\widehat{ACB}$ و $\widehat{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\widehat{AB}$ کمان کوچک‌تر مشخص شده توسط A و B است.

۷- **اندازه کمان**، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

۸- با توجه به شکل به سادگی دیده می شود که کمان های دایره های مختلف می توانند اندازه های برابر و طول های نابرابر داشته باشند.

۱- با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازه 36° است، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{360} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$

۲- با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\widehat{AB} = 60^\circ \quad \widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{A_1B_1} = 60^\circ \quad \widehat{A_1B_1} = \frac{2\pi}{3}$$

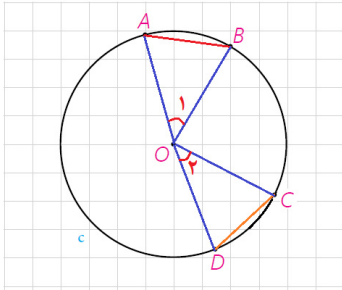
$$\frac{60}{360} = \frac{\widehat{\text{AB}} \text{ طول}}{(2\pi \times 1)} \Rightarrow \widehat{\text{AB}} \text{ طول} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{60}{360} = \frac{\widehat{A_1B_1} \text{ طول}}{2\pi \times 2} \Rightarrow \widehat{A_1B_1} \text{ طول} = \frac{2\pi}{3}$$

۳- ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با: $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$ و مساحت قطاع برابر است با: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$

طول کمان قطاع یک درجه $\frac{1}{360}$ محیط دایره است یعنی $\frac{2\pi r}{360}$. در نتیجه طول کمان نظیر قطاع α درجه $L = \frac{\pi r}{180} \alpha$ است

مساحت قطاع یک درجه $\frac{1}{360}$ مساحت دایره است یعنی $\frac{\pi r^2}{360}$. در نتیجه مساحت قطاع α درجه $A = \frac{\pi r^2}{360} \alpha$ است.



۱- فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایره $C(O, r)$ باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.

فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ حکم: $AB = CD$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB = CD$$

۲- فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

فرض: $AB = CD$ حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

۳- وتر AB و قطری از دایره که بر وتر AB عمود است مانند شکل مقابل داده شده‌اند. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

فرض: $CD \perp AB$ حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$, $AH = BH$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array} \right.$$

۴- این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

فرض: $AH = BH$ حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ و $CD \perp AB$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ AH = BH \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array} \right.$$

۵- حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

فرض: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ حکم: $AH = BH$ و $CD \perp AB$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array} \right.$$

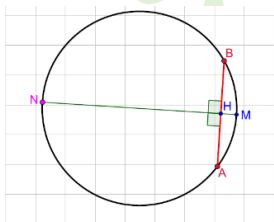
نتیجه: عمود منصف وتر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

۶- اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر

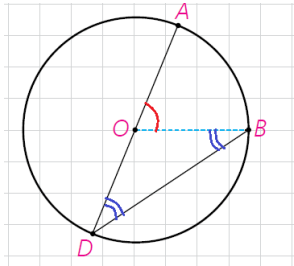
عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم

و از سمت H امتداد دهیم تا دایره را در نقطه N قطع کند. با توجه به ۴ و ۵ قطر MN عمود بر این وتر است.



فعالیت



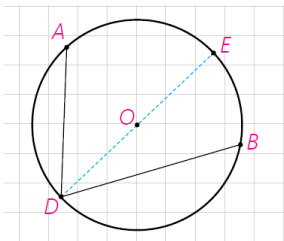
۱- در شکل مقابل یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

۲- اگر از B به O وصل کنیم، زاویه AOB یک زاویه خارجی برای مثلث متساوی الساقین OBD است.

$$\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \widehat{OBD} = 2\widehat{ODB}$$

و از آن نتیجه می‌شود:

$$\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$



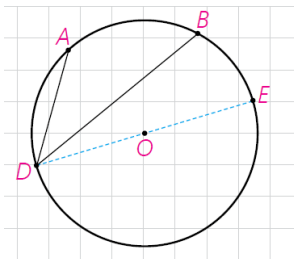
۲- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{EDB} = \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

۱- اگر قطر DE را رسم کنیم طبق قسمت ۱ داریم:

۳- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

۱- اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

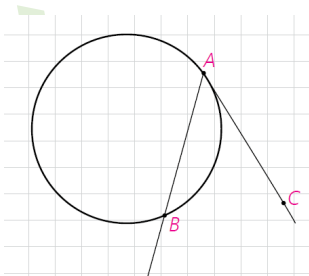


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{BDE} = \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} - \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

بنابراین:

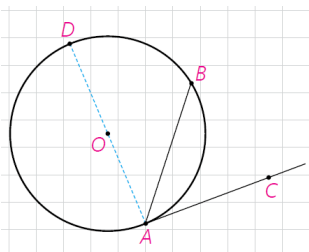
قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

زاویه ظلی



نوع دیگری از زاویه که در دایره مطرح است زاویه ظلی می‌باشد. زاویه ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتر از دایره باشد. در شکل مقابل $\widehat{BAC}$ یک زاویه ظلی است.

فعالیت



$$\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD} \quad \text{و بنابراین} \quad \widehat{DAC} = 90^\circ \quad \text{الف}$$

ب) زاویه DAB یک زاویه محاطی است.

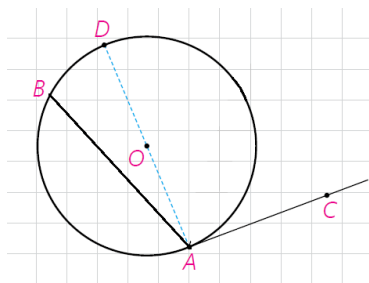
$$\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB} \quad \text{بنابراین}$$

(پ) از (الف) و (ب) داریم:

$$\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{DA} - \widehat{DB})$$

و بنابراین

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$



(ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

(الف) $\widehat{DAC} = 90^\circ$ و بنابراین:

$$\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$$

(ب) زاویه DAB یک زاویه محاطی است.

بنابراین:

$$\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$$

(پ) از (الف) و (ب) داریم:

$$\widehat{DAC} + \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{DA} + \widehat{DB})$$

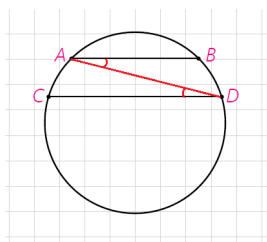
و بنابراین

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

بنابراین:

قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با ... نصف ... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

کاردکلاس



۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

(الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
این دو زاویه بنا بر قضیه خطوط موازی با هم برابر هستند.

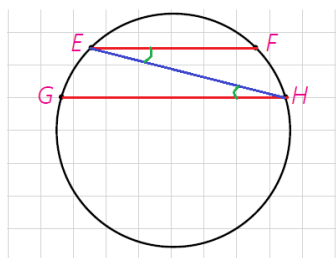
(ب) کمان‌های BD و AC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو کمان روبه‌رو به زوایای محاطی برابر هستند، پس بایکدیگر برابرند.

۲- در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.

(الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

(ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



$$\widehat{EG} = \widehat{FH} \Rightarrow \frac{\widehat{EG}}{2} = \frac{\widehat{FH}}{2} \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \widehat{EHG} = \widehat{FEH}$$

(پ) خطوط EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

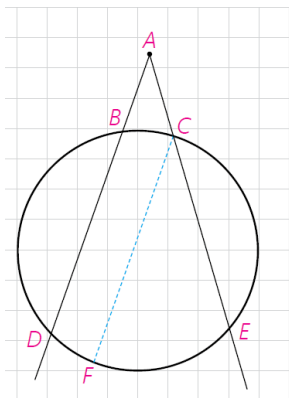
باهم موازی هستند بنا بر عکس قضیه خطوط موازی

نتیجه

دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

تاکنون زاویه‌هایی که رأس آنها بر روی دایره باشد را بررسی کردیم و رابطه اندازه این زاویه‌ها با اندازه کمان‌های ایجاد شده توسط آنها را مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند می‌پردازیم.

فعالیت



۱- فرض کنید رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده باشد و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویه مورد نظر مشخص شده باشند.

– از نقطه C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

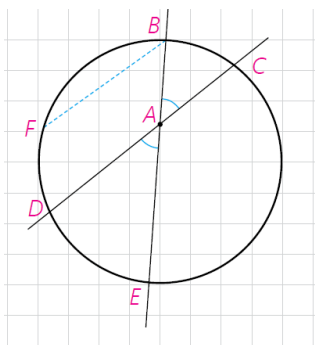
AD // CF و AE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{DAE} = \widehat{FCE}$

زاویه $\widehat{FCE}$ محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $\widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE}$.

باتوجه به شکل $\widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم $\widehat{BC} = \widehat{DF}$

پس داریم: $\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$



۲- رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل در درون دایره می‌باشد و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

– از نقطه B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

BF // BE و BE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{DAE} = \widehat{FBE}$

زاویه $\widehat{FBE}$ محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $\widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE}$.

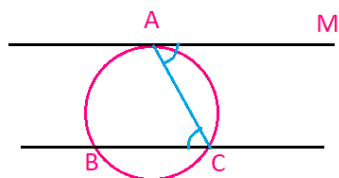
باتوجه به شکل: $\widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم: $\widehat{BC} = \widehat{DF}$

پس داریم: $\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$

۱- در شکل‌های زیر ثابت کنید :

راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



ثابت می شود که کمان های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره باهم برابرند.

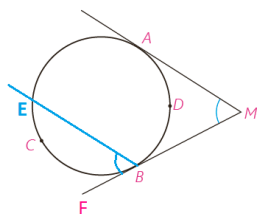
در شکل مقابل بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{MAC} = \widehat{BCA}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ظلی} \quad \widehat{MAC} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \text{محاطی} \quad \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \end{array} \right\} \xrightarrow{\widehat{MAC} = \widehat{ACB}} \frac{1}{2} \widehat{AC} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad (\text{الف})$$

راه اول: بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{AMB} = \widehat{EBF}$

$$\widehat{AMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AE}}{2} \xrightarrow{\widehat{AE} = \widehat{ADB}} \widehat{AMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$



راه دوم: از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث $\widehat{AMB}$ زاویه $\widehat{EBA}$ خارجی است پس:

$$\widehat{EBA} = \widehat{MAB} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \widehat{EBA} - \widehat{MAB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} - \frac{1}{2} \widehat{ADB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{(\widehat{ACB} - \widehat{ADB})}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \quad (\text{ب})$$

راه اول: بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{CMB} = \widehat{EBF}$

$$\widehat{CMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{CE}}{2} \xrightarrow{\widehat{CE} = \widehat{AB}} \widehat{CMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

راه دوم: از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث $\widehat{AMB}$ زاویه $\widehat{BAC}$ خارجی است پس:

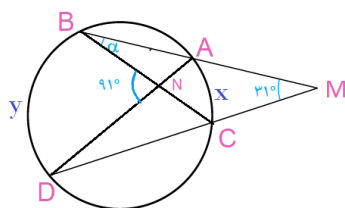
$$\widehat{BAC} = \widehat{MBA} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \widehat{BAC} - \widehat{MBA} \Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{2} \widehat{BC} - \frac{1}{2} \widehat{AB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{(\widehat{BC} - \widehat{AB})}{2}$$

۲- در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

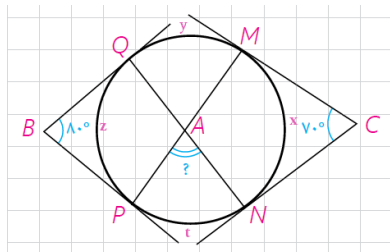
$$\hat{M} = \frac{y-x}{2} \Rightarrow 2 \times 31^\circ = y-x$$

$$\hat{N} = \frac{y+x}{2} \Rightarrow 2 \times 91^\circ = y+x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-x=62^\circ \\ y+x=182^\circ \end{cases} \Rightarrow 2y=244^\circ \Rightarrow y=122^\circ \Rightarrow x=60^\circ$$



۳- در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

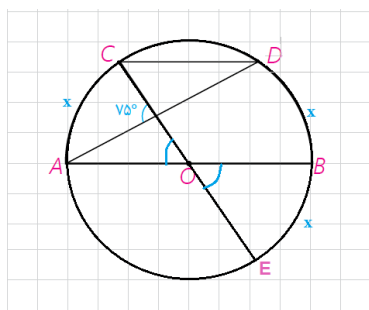


$$70^\circ = \frac{(y+z+t)-x}{2} \Rightarrow 140^\circ = (y+z+t)-x$$

$$160^\circ = \frac{(y+x+t)-z}{2} \Rightarrow 160^\circ = (y+x+t)-z$$

$$\begin{cases} 140^\circ = y+z+t-x \\ 160^\circ = y+x+t-z \end{cases} \Rightarrow 300^\circ = 2(y+t) \Rightarrow y+t = 150^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{y+t}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$



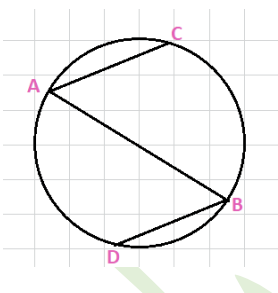
۴- در شکل، O مرکز نیم دایره است و $CD \parallel AB$ اندازه کمان CD را به دست آورید.

$$75^\circ = \frac{(x+x)+x}{2} \Rightarrow 150^\circ = 3x \Rightarrow x = 50^\circ$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - 2x \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

۵- در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.

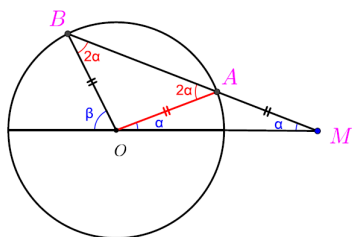
ثابت کنید: $AC = BD$



$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 180^\circ$$

$$\widehat{ACB} - \widehat{BC} = \widehat{ADB} - \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow AC = BD$$



۶- دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم

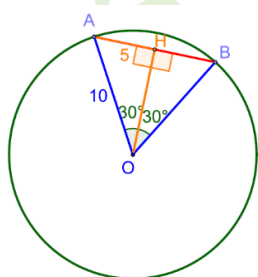
کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ ؛ نشان دهید: $\beta = 3\alpha$

با توجه به فرض مسئله، مثلث‌های OAB و OAM متساوی الساقین هستند.

$$\text{در مثلث OBM داریم: } \beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

۷- در دایره $C(O,R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست

آورید.



می‌دانیم که مثلث OAB متساوی الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله ی وتر از مرکز باید

نقطه ی O بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر

وتر را نصف می‌کند بنا بر این $AH = 5$ پس در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} \Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

۸- در دایره $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$
 $(OH \text{ و } OH' \text{ فاصله } O \text{ از دو وتر } AB \text{ و } CD \text{ هستند.})$
 راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیه فیثاغورس استفاده کنید.

فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$

$$OB = OC = R, \quad BH = \frac{AB}{2}, \quad CH = \frac{CD}{2} \quad (1)$$

$$\triangle OBH : H = 90^\circ \Rightarrow BH^2 = R^2 - OH^2$$

$$\triangle OCH' : H' = 90^\circ \Rightarrow CH'^2 = R^2 - OH'^2$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \xrightarrow{(1)} BH > CH' \Rightarrow BH^2 > CH'^2$$

$$\Rightarrow R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \xrightarrow{\times(-1)} OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{\frac{OH^2 > 0}{OH'^2 > 0}} OH < OH'$$

فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$

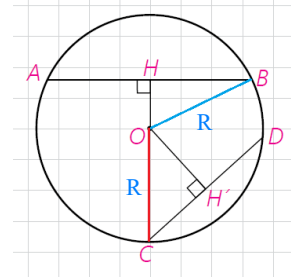
$$OB = OC = R, \quad 2BH = AB, \quad 2CH = CD \quad (1)$$

$$\triangle OBH : H = 90^\circ \Rightarrow OH^2 = R^2 - BH^2$$

$$\triangle OCH' : H' = 90^\circ \Rightarrow OH'^2 = R^2 - CH'^2$$

$$OH < OH' \Rightarrow R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2$$

$$\Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \xrightarrow{\times(-1)} BH^2 > CH'^2 \xrightarrow{\frac{BH^2 > 0}{CH'^2 > 0}} BH > CH' \xrightarrow{(1)} AB > CD$$



درس دوم

رابطه های طولی در دایره

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی نباشند، یکدیگر را برون یا روی یا درون دایره قطع می کنند. در هر حالت به بررسی روابط بین اندازه پاره خط های حاصل می پردازیم.

فعالیت

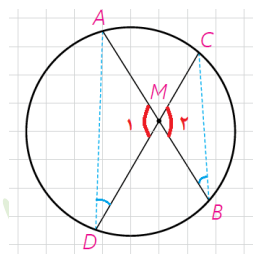
۱- دو وتر AB و CD در نقطه M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده اند.

الف) از A به D و از B به C وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه اند.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \quad \text{ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم:}$$

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM \quad \text{۱ و در نتیجه:}$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{D} = \hat{B} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \cong \triangle MBC$$