درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

مقدمه

پیشامدهایی وجود دارند که ممکن است رخ بدهند یا رخ ندهند و ما ازچگونگی رخ دادن آنها اطلاع نداریم. به‌عنوان مثال تا زمانی که سکه را پرتاب نکرده‌ایم، نتیجهٔ پرتاب سکه (پشت یا رو آمدن آن)، مشخص نیست. چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی را که نتیجهٔ آن به‌طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد؛ اما از همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم، پدیده‌ها یا آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم. به‌عنوان مثال نتیجهٔ یک بازی فوتبال از قبل، قابل پیش‌بینی نیست؛ اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم‌ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد.

همان‌طور که در سال قبل خواندید، مجموعهٔ شامل همهٔ این حالت‌های ممکن، فضای نمونه‌ای نامیده می‌شود. اگر این مجموعه را S بنامیم، هر زیر مجموعهٔ S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.

پیشامدهای تصادفی

فعالیت

۱ اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سؤال‌ها پاسخ دهید :

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱و۳)	(۱و۴)	(۱,۵)	(۱و۶)
۲	(۲,۱)	(۲و۲)	(۲,۳)	(۲و۴)	(۲و۵)	(۲,۶)
۳	(۳و۱)	(۳و۲)	(۳,۳)	(۳و۴)	(۳,۵)	(۳و۶)
۴	(۴و۱)	(۴,۲)	(۴و۳)	(۴و۴)	(۴و۵)	(۴و۶)
۵	(۵و۱)	(۵و۲)	(۵و۳)	(۵و۴)	(۵و۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶و۲)	(۶و۳)	(۶و۴)	(۶و۵)	(۶,۶)

تعداد کُل حالات = ۶ × ۶ = ۳۶

۲ قطر آبی رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟ پیشامدهایی که در آن مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد.

۳ خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند هاشور بزنید؛ چه الگویی به‌دست می آید؟ هر دو حالت ۱۸ مورد می‌باشند، ۹ مورد هر دو عدد رو شده زوج و ۹ مورد هر دو عدد رو شده فرد می‌باشند.

۴ با توجّه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.

مسئله: تعداد حالت هایی را بنویسید که در آن اعداد رو شده برابر باشند. جواب: ۶ حالت وجود دارد.

۵ با توجّه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راهنمایی: به‌عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است) مجموع دو عدد رو شده $= x_i$ و تعداد $= n$

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$n(x_i)=\begin{cases} x_i-۱ & x_i=۲,۳,۴,۵,۶,۷ \\ ۱۳-x_i & x_i=۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲ \end{cases}$$

کار در کلاس

فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

۱ آیا می‌توانید نتیجهٔ حاصل را به‌صورت قطعی بیان کنید؟ خیر

۲ آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟ چرا؟ بله، تصادفی است زیرا نتیجه آن قبل از وقوع قابل پیش‌بینی نیست.

۳ همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).

{۶ر و ۵ر و ۴ر و ۳ر و ۲ر و ۱ر و ۶پ و ۵پ و ۴پ و ۳پ و ۲پ و ۱پ}

۴ تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به‌دست آورید. ۲×۶=۱۲

۵ جدول ۶×۲ یا ۲×۶ مربوط به این آزمایش را رسم کنید.

سکه \ تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
پ	۱پ	۲پ	۳پ	۴پ	۵پ	۶پ
ر	۱ر	۲ر	۳ر	۴ر	۵ر	۶ر

مثال ۱

فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد؛ امّا از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر ترتیب به‌دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجّه به اصل ضرب تعداد همهٔ حالت‌های ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از: $۲^۴ = ۲\times۲\times۲\times۲$. حالت (پ، پ، د، پ) به معنای این است که فرزند اول یا بزرگ‌تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید.

پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد» = A

A = {(د، پ، پ، پ) و (پ،د،پ،پ) و (پ،پ،د،پ) و (پ، پ، پ، د)}

ب پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» = B

B = {(پ، پ، پ، پ) و (د،پ،پ،پ) و (پ،د،پ،پ) و (پ،پ،د،پ) و (پ، پ، پ، د)}

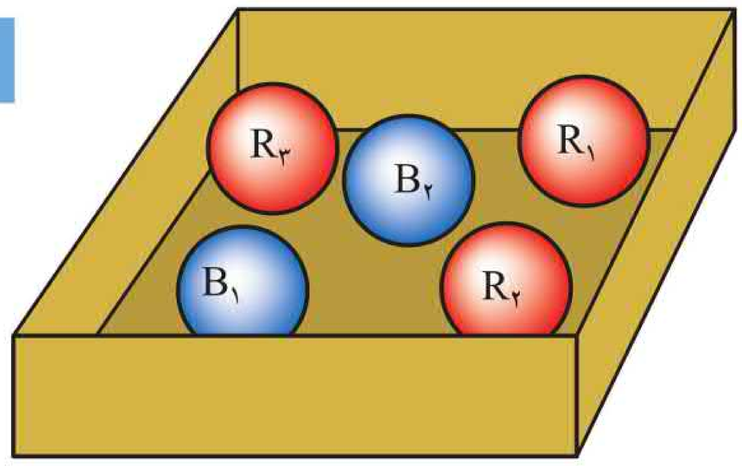
پ پیشامد اینکه « تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند» = C

C = {(پ، پ، د، د) و (پ،د،د،پ) و (د،پ،پ،د) و (پ،د،پ،د) و (د،پ،د،پ) و (د، د، پ، پ)}

ت پیشامد اینکه « تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد » = D

D = {(پ، پ، پ، پ) و(پ،پ،پ،د) و(پ،پ،د،پ) و (پ،د،پ،پ) و (د، پ، پ، پ)}

مثال ۲



در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهرهٔ آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از $\binom{5}{3} = 10$ زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه ای به صورت زیر نوشته می شود :

$S = \{R_1R_2R_3 و R_1R_2B_1 و R_2R_3B_2 و R_1R_3B_1 و R_1R_3B_2 و R_1R_2B_2 و R_2R_3B_1 و B_1B_2R_1 و B_1B_2R_2 و B_1B_2R_3\}$

اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به ترتیب A و B و C بنامیم؛ خواهیم داشت :

$A = \{B_1R_1R_2 و B_1R_1R_3 و R_2R_3B_2 و R_1R_3B_2 و R_1R_2B_2 و R_2R_3B_1 و B_1B_2R_1 و B_1B_2R_2 و B_1B_2R_3\}$

$B = \{B_1R_1R_2 و R_2R_3B_2 و R_1R_3B_1 و R_1R_3B_2 و R_1R_2B_2 و R_2R_3B_1 و R_1R_2R_3\}$

$C = \{R_1R_2R_3\}$

اگر S را مجموعهٔ مرجع فرض کنیم، متمم A یعنی A' با کدام‌یک از مجموعه های B یا C برابر است؟ متمم A یعنی A' برابر C است. $A' = C$

پیشامدها و برخی اعمال روی آنها

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این‌صورت هر یک از پیشامدهای $(A \cup B)$، $(A \cap B)$ و $(A-B)$ در فضای نمونه‌ای S به‌صورت‌های زیر توصیف می‌شوند :

الف) اجتماع دو پیشامد :

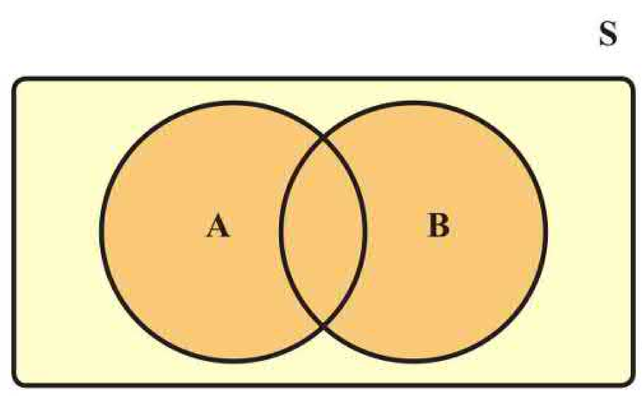
پیشامد $(A \cup B)$ وقتی رخ می‌دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد. (یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند.)

ب) اشتراک دو پیشامد :

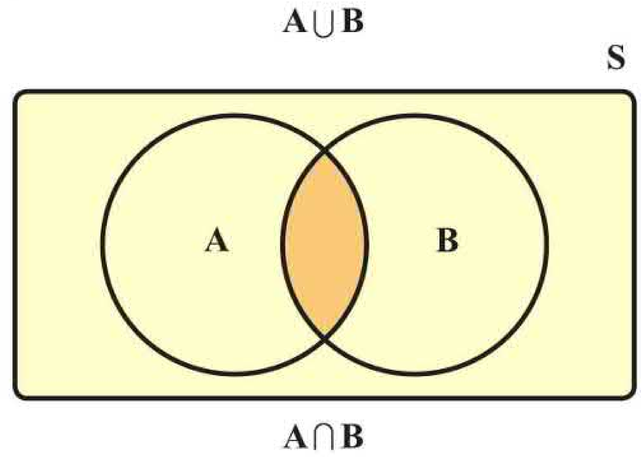
پیشامد $(A \cap B)$ وقتی رخ می‌دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد).

پ) تفاضل دو پیشامد :

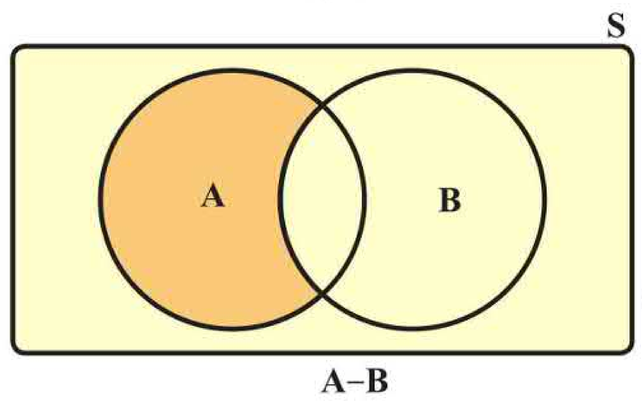
پیشامد $(A-B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.



(الف) $A \cup B$

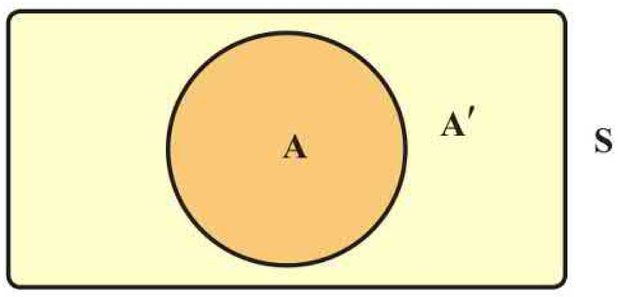


(ب) $A \cap B$



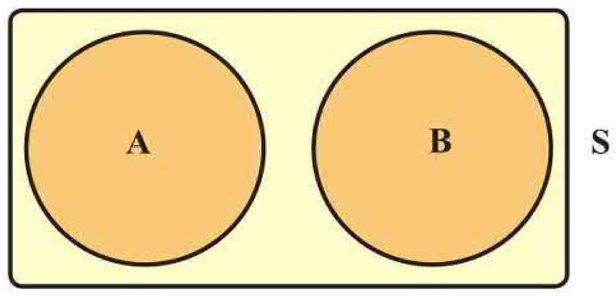
(پ) $A-B$

ت) متمم یک پیشامد :



اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم پیشامد A که با A' (یا A^C) نمایش داده می‌شود، وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد؛ بنابراین با توجّه به نمودار واضح است که $A \cup A' = S$ و $A \cap A' = \varnothing$

تعریف : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \varnothing$، در این‌صورت A و B را دو پیشامد **ناسازگار** می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی دهند.



تذکر : با توجّه به تعریف متمم یک پیشامد، همواره هر پیشامد تصادفی مانند A ومتمم آن یعنی A'، دو پیشامد ناسازگارند.

اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه $A \cap B = \varnothing$ و $A \cap C = \varnothing$ و $B \cap C = \varnothing$ باشد.

مثال ۳

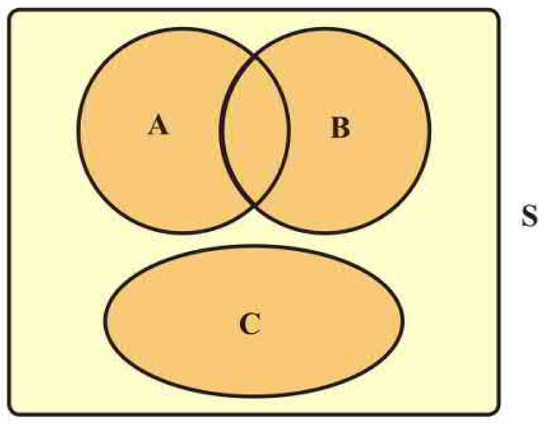
اگر یک تاس را بیندازیم و پیشامدهای «روشدن عدد بزرگ‌تر از ۴»، «رو شدن عدد کوچک‌تر از ۳» و «رو شدن عدد ۳ یا ۴» را به‌ترتیب A، B و C تعریف کنیم، در این‌صورت همواره، پیشامدهای A، B و C دو به دو ناسازگارند و داریم :

الف) $A=\{۵,۶\}$, $B=\{۱,۲\}$, $C=\{۳,۴\}$

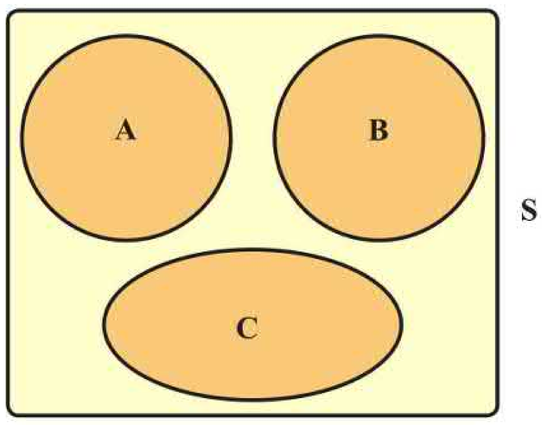
ب) $A'=\{۱,۲,۳,۴\}$, $B'=\{۳,۴,۵,۶\}$, $C'=\{۱,۲,۵,۶\}$

مثال ۴

کدام‌یک از شکل های زیر سه پیشامد دو به دو ناسازگار را نشان می دهد؟



جواب ⇐



کار در کلاس

۱ با توجّه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هر یک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پرکنید.

A = پیشامد آنکه هر دو تاس فرد باشند = $\{(۱,۱) , (۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\}$

B = پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد = $\{(۱,۵) , (۵,۱) , (۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\}$

C = پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید = $\{(۳,۱) , (۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

الف) پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آنها ۶ باشد»

$(A \cap B) = \{(۱,۵) , (۵,۱),(۳,۳)\} \rightarrow n(A \cap B) = ۳$

ب) پیشامد آنکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد»

$A \cup B = \{(۱,۱) , (۱,۳) , (۳,۱) , (۱,۵) , (۵,۱) , (۲,۴) , (۴,۲) , (۳,۳) , (۳,۵) , (۵,۳) , (۵,۵)\}$

پ) پیشامد آنکه (A−C) رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی مجموع دو تاس ۶ نباشد.» پس داریم :

$$A-C=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۵,۱),(۳,۵),(۵,۵)\}$$

ت) پیشامد (C−B) را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید. تاس اول مضرب ۳ باشد ولی مجموع دو تاس ۶ نباشد.

$$C-B=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

ث) اگر پیشامد D را « مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم ، آیا D و E ناسازگارند؟ چرا؟ بله ناسازگارند زیرا :

$$\left.\begin{array}{l} D=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\} \\ E=\{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\} \end{array}\right\rangle D\cap E=\varnothing$$

۲) تاسی را می اندازیم ، روی فضای نمونه ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری تعریف کنید که :

الف) A و B ناسازگار باشند. $A=\{۱,۲,۳\}\quad,\quad B=\{۳,۵\}$

ب) A و B و C دو به دو ناسازگار باشند. $A=\{۱\}\quad,\quad B=\{۲,۴\}\quad,\quad C=\{۵,۶\}$

پ) $(A\cap B)$ و C ناسازگار باشند . $A=\{۱,۲,۳\}\quad,\quad B=\{۳,۴\}\quad,\quad C=\{۵,۶\}$

مثال ۵

یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم :

الف) فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

n(S) =۲×۲× ...۶... = ...۲۴..

ب) پیشامد آنکه «هردو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.

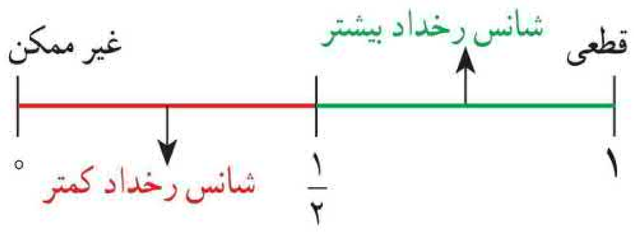
A = {(۲, ر , ر) , (۴و رو ر) , (۶و رو ر)}

پ) پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید» را تشکیل دهید.

B = {(۵, ر , ر) , (۵, پ , ر) , (۵, ر , پ) , (۵, پ , پ) , (۱, پ , پ) , (۲و پ و پ) , (۳و پ و پ) , (۴و پ و پ) , (۶, پ , پ)}

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

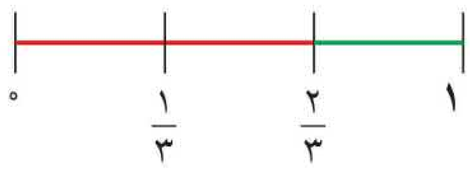
می‌دانیم اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A\subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمالِ رخداد پیشامد A یعنی P(A) که به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود، عددی است حقیقی که $۰\le P(A)\le ۱$. همچنین می‌دانیم P(A) هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A بیشتر و هر چقدر به‌صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کمتر است. در واقع در مسائل احتمال با محاسبهٔ P(A) شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کنیم.



مثال ۱

فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم :

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟



$S = \{۴۳,۳۴,۲۴,۴۲,۲۳,۳۲\}$

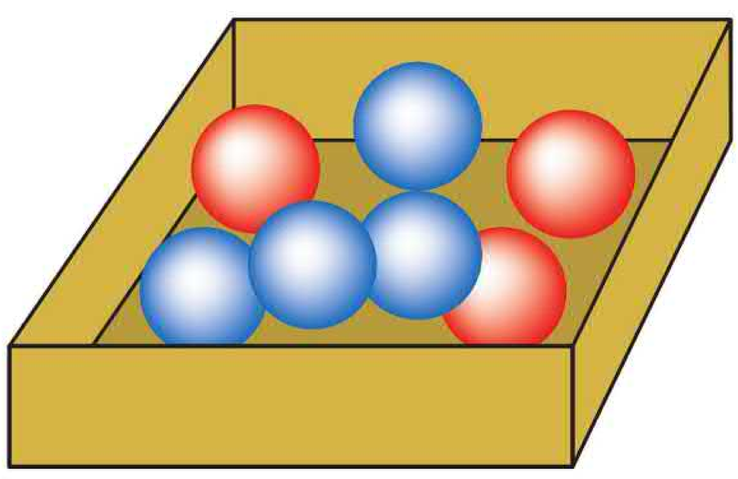
$A = \{۳۴ , ..۲۴.. , ..۴۲.. ,۳۲\} , B = \{..۴۳.. , ..۲۳..\}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

واضح است که $P(A) > P(B)$ ، پس شانس رخداد پیشامد A از شانس رخداد پیشامد B بیشتر است. (در این مثال تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد ، بیشتر است)

مثال ۲

در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :



الف) هر سه مهره آبی باشند.

ب) هر سه مهره همرنگ باشند.

پ) دقیقاً ۲ مهره همرنگ باشند.

الف) $n(S) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!۴!} = ۳۵$

$P(A) = \frac{\binom{۴}{۳}}{۳۵} = \frac{۴}{۳۵}$

ب) $P(B) = \frac{\binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳}}{۳۵} = \frac{۱}{۷}$

یا هرسه مهره آبی ، یا هر سه قرمز

پ) $P(C) = \frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱} + \binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}}{۳۵} = \frac{۱۸+۱۲}{۳۵} = \frac{۶}{۷}$

دو مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ آبی یا دو آبی و یک قرمز

فعالیت

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این‌صورت :

I) $۰ \le P(A) \le ۱$

زیرا : $A \subseteq S \Rightarrow ۰ \le n(A) \le n(S) \Rightarrow \frac{۰}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow ۰ \le P(A) \le ۱$

II) $P(\varnothing) = ۰ , P(S) = ۱$

آندری نیکولاویچ کولموگوروف ریاضی‌دان اهل روسیه بود که دستاوردهای برجسته‌ای در زمینه های احتمال دارد. او برای اولین بار در سال ۱۹۳۳ میلادی اصولی تحت عنوان اصول احتمال را معرفی کرد.

زیرا : $P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{۰}{n(S)}=۰\ ,\ P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱$

III) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

زیرا : $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } n(S)}$

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S، همواره تساویِ زیر برقرار است :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

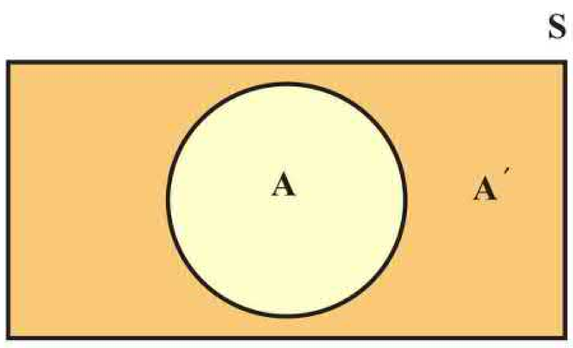
اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به‌صورت زیر نوشته می شود :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

کار در کلاس

اگر A' متمم پیشامد A در فضای نمونه‌ایِ S باشد، (A و A' ناسازگارند) نشان دهید.

$P(A)=۱-P(A')$



می‌دانیم $P(A\cup A')=P(S)=۱$

از طرفی $P(A\cup A')=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A)+P(A')=۱\Rightarrow \begin{cases}P(A)=۱-P(A')\\ P(A')=۱-P(A)\end{cases}$

مثال ۱

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف هر دو تاس زوج باشند؟ (می‌دانیم در انداختن دو تاس $n(S)=۶^۲=۳۶$)

پیشامد هر دو زوج $A=\{(۲,۲),(۲,۴),(۴,۲),(۲و۶),(۶و۲),(۶و۴),(۴و۶),(۴و۴),(۶,۶)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند

مجموع دو تاس ۸ = B $\rightarrow B=\{(۳,۵),(۵,۳),(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴)\}$

هر دو تاس فرد = C $\rightarrow A=\{(۱و۱),(۱و۳),(۱و۵),(۳و۱),(۳و۳),(۳و۵),(۵و۱),(۵و۳),(۵و۵)\}$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}-\frac{۲}{۳۶}=$$

$$\left((B\cap C)=\{(۳,۵),(۵,۳)\}\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{۲}{۳۶}\right)$$

پ مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟

$D=$ مجموع دو تاس ۷ $\rightarrow D=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$A=$ هر دو تاس زوج $\rightarrow n(A)=۹\ ,\ (A\cap B)=\varnothing$

$$\Rightarrow P(D\cup A)=P(D)+P(A)=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}$$

ت مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند تغییر کند و چون تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ است، زیاد و محاسبهٔ آن طولانی است، از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

پیشامد مجموع کمتر از ۱۱ $=A$

$A'=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$ (پیشامد مجموع، بزرگ‌تر یا مساوی ۱۱)

$$\Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۳۶}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳۳}{۳۶}$$

ث حاصل‌ضرب دو عدد رو شده ۱۲ باشد؟

$A=\{(۲,۶)\ ,\ (۶و۲)\ ,\ (۴و۴)\ ,\ (۴و۳)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}$$

تو کز سرای طبیعت نمیروی بیرون
کجا به کوی طریقت گذر توانی کرد

فرض کنیم تعداد دکمه‌های یک رایانه ۵۰ عدد باشد و کودکی که خواندن و نوشتن نمی‌داند، به صورت تصادفی شروع به تایپ کردن کند. چقدر احتمال دارد که یک کلمه مانند «طبیعت» را تایپ کند؟

از آنجایی که رایانه ۵۰ دکمه دارد احتمال انتخاب هر حرف مانند «ط» برابر است با $\frac{۱}{۵۰}$ چون این کلمه ۵ حرف دارد احتمال تایپ آن برابر است با

$$\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}=\frac{۱}{۵۰^{۵}}$$

اگر همین کودک بخواهد بیت بالا را به طور تصادفی تایپ کند احتمال آن چقدر است؟ این عدد چقدر کوچک است؟

حال اگر شعری که این بیت در آن قرار دارد بخواهیم تصادفی تایپ کنیم احتمال آن چقدر می‌شود؟

اگر کسی به شما بگوید به طور تصادفی کودکی کتاب حافظ را تایپ کرد شما باور می‌کنید؟

طبیعتی که در اطراف ما است بسیار پیچیده‌تر از شعر حافظ است، آیا می‌توان پذیرفت که به طور تصادفی به‌وجود آمده است؟

مثال ۲

اگر حروف کلمهٔ جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد :

الف حرف «ی» آخر باشد؟

ب دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

پ با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

حل :

طبق مثال حل شده در فصل ۶ داریم :

الف) $P(A)=\frac{۷!}{۸!}=\frac{۱}{۸}$

ب) $P(B)=\frac{۲!\times ۷!}{۸!}=\frac{۲}{۸}$

پ) ج ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ی

$n(C)=۱\times۲\times.....\times۶$

$P(C)=\frac{۶!}{۸!}=\frac{۱}{۵۶}$

تمرین

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوجِ کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به‌تصادف برمی‌داریم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید. $S=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟ $۲^۵=۳۲$

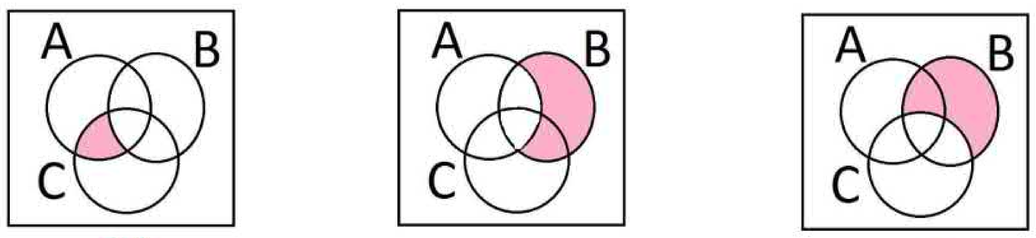
پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد»، مشخص کنید. $A=\{۴,۸\}$

۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.



الف ب پ

۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید :

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد». $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ فضای نمونه ای

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد». $B=\{۲,۳,۵,۷\}$

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد». $C=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

۴ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

$S=\{ppp,ppd,pdp,dpp,pdd,dpd,ddp,ddd\}$ فضای نمونه ای

$E=\{ppd,pdp,dpp,pdd,dpd,ddp,ddd\}$ پیشامد

۵ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکّهٔ دیگر را می‌اندازیم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید. $\{(p,۱),(p,۲),(p,۳).(p,۴),(p,۵),(p,۶),(r,r,r),(r,p,r),(r,r,p),(r,p,p)\}$

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

$\{(p,۲)(p,۴)(p,۶)\}$

$\{(r,r,r),(r,p,r),(r,r,p)\}$

۶ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشتهٔ ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشتهٔ تجربی یک تیم دو نفرهٔ تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۰}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳\times۱}{۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟

$$P(B)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۰}+\binom{۳}{۰}\times\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳+۱}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

پ) ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی و ۱ نفر از رشتهٔ تجربی باشد؟

$$P(C)=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳\times۲}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

Hamkelasi.ir

۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A ($P(A)=\frac{۳۴}{۱۰۰}$) و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳۴}{۱۰۰}+\frac{۶۲}{۱۰۰}-\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۸۱}{۱۰۰}$$

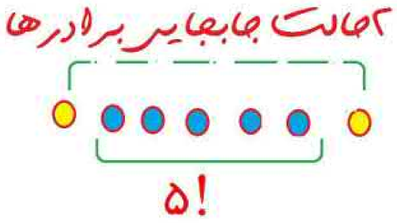
۸ اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند ، چقدر احتمال دارد :

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

تعداد حالت های دو برادر

$$P(A)=\frac{۶!\times ۲!}{۷!}=\frac{۲}{۷}\qquad \Rightarrow P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟



$$P(B)=\frac{۵!\times ۲}{۷!}=\frac{۱}{۲۱}$$

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A)\le P(B)$.

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\le n(B)\xrightarrow{\div n(S)}\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(B)}{n(S)}\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

ما در عصر احتمال به سر می بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست
اما من
بی نام تو
حتی
یک لحظه احتمال ندارم

چشمان تو
عین الیقین من
قطعیت نگاه تو
دین من است
من از تو ناگزیرم
من
بی نام ناگزیر تو می میرم

قیصر امین پور