تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطهٔ $P(x) = ۵x - ۲۰۰$ به‌دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله $P(x) = ۵x - ۲۰۰$	۱۵۰-	۱۰۰-	۰	۵۰	۳۰۰

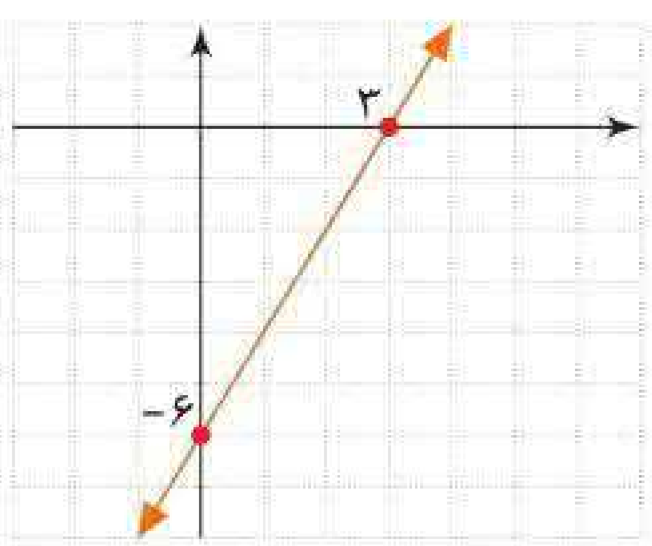
همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعداد کالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت P(x) برای xهای مختلف از جدول زیر به‌دست می‌آید.

x	$x < ۴۰$	۴۰	$x > ۴۰$
P(x)	−	۰	+

حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ اول

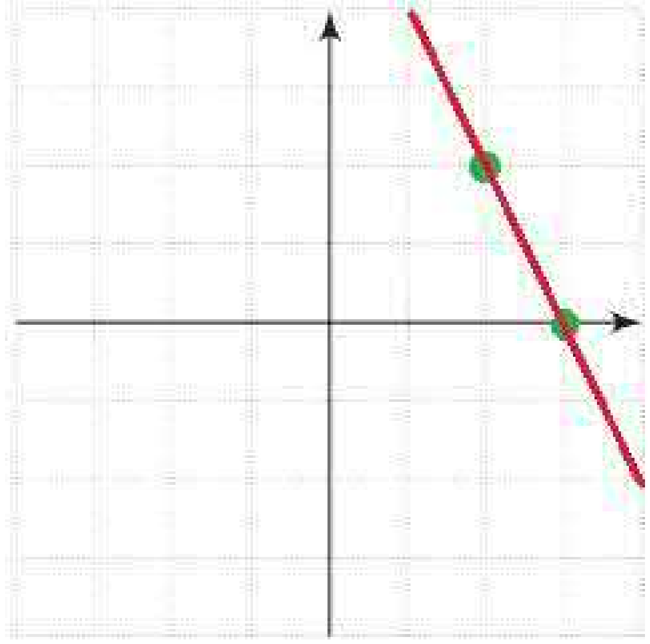
فعالیت



۱ نمودار خط $y = ۲x - ۶$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y=۲x-۶$	−	۰	+

۲ نمودار خط $y = -۲x + ۶$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای xهای مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.



x	y
۲	۲
۳	۰

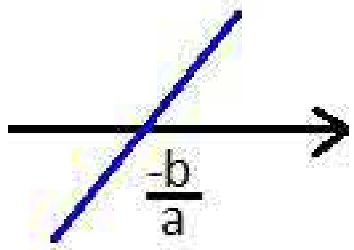
x	x < ۳	۳	x > ۳
y=−۲x+۶	+	۰	−

۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

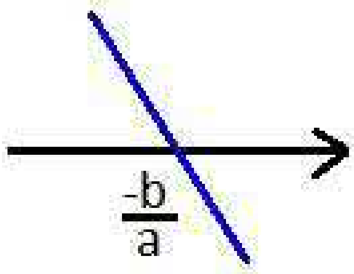
اگر ضریب x مثبت باشد علامت قبل از ریشه منفی و بعد از آن مثبت است

اگر ضریب x منفی شود، علامت ها عکس خواهد شد. یعنی قبل از ریشه مثبت و بعد از آن منفی است.

۴ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$، برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.



اگر a مثبت باشد نمودار حالتی از این نوع دارد (شکل مقابل) با توجه به شکل، قبل از ریشه منفی و بعد از آن مثبت است یعنی قبل از ریشه مخالف علامت a و بعد از آن موافق علامت a است.



اگر a منفی باشد نمودار حالتی از این نوع دارد (شکل مقابل) با توجه به شکل، قبل از ریشه مثبت و بعد از آن منفی است یعنی قبل از ریشه مخالف علامت a و بعد از آن موافق علامت a است.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
y = ax+b	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مثال

عبارت $y = ۵x - ۲$ را تعیین علامت می‌کنیم.

ریشهٔ عبارت $۵x-۲$ از معادلهٔ $۵x-۲=۰$ به دست می‌آید که برابر $x = \frac{۲}{۵}$ است.

با توجه به اینکه علامت ضریب x ؛ یعنی $a = ۵$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به‌صورت زیر است :

x	$x < \frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$x > \frac{۲}{۵}$
y = ۵x −۲	−	۰	+

مقدار y را برای $x = ۳$ و $x = -۱$ به‌دست آورید و صحت علامت اعداد به‌دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$x = -۱ \Rightarrow y = ۵(-۱) - ۲ = -۷ \rightarrow$ منفی

$x = ۳ \Rightarrow y = ۵(۳) - ۲ = ۱۳ \rightarrow$ مثبت

مثال علامت عبارت $A=(2x-1)(3-x)$ را برای xهای مختلف تعیین می‌کنیم. جدول تعیین علامت برای هرکدام از عبارت‌های $3-x$ و $2x-1$ به‌صورت زیراست :

x	$x<3$	۳	$x>3$
$3-x$	+	۰	−

x	$x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$
$2x-1$	−	۰	+

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به‌صورت زیر می‌نویسیم :

x	$x>\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<3$	۳	$x>3$
$2x-1$	−	۰	+		+
$3-x$	+		+	۰	−

بنابراین در سه ناحیهٔ بالا که با رنگ‌های مختلف نشان داده شده، علامت هرکدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x>3$، عبارت $2x-1$، مثبت است؛ ولی $x-3$ منفی می‌باشد، پس علامت عبارت حاصل‌ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیهٔ دیگر، جدول تعیین علامت $A=(2x-1)(3-x)$ به‌صورت زیر است[1].

x		$\frac{1}{2}$		۳	
$2x-1$	−	۰	+		+
$3-x$	+		+	۰	−
A	−	۰	+	۰	−

دقت کنید که روی ستون‌ها نیزقاعدهٔ ضرب انجام شده است.

مقدار A را برای $x=4$ و $x=0$ به‌دست آورید و صحت علامت مقادیر به‌دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$x=4 \Rightarrow y=(8-1)(3-4)=-7 \rightarrow$ منفی

$x=0 \Rightarrow y=(0-1)(3-0)=-3 \rightarrow$ منفی

کار در کلاس هریک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(3x+1)(x-2)$

x		$-\frac{1}{3}$		۲	
$3x+1$	−	۰	+		+
$x-2$	−		−	۰	+
A	+	۰	−	۰	+

ب) $B=(2x-3)^2$

x		$\frac{3}{2}$	
$B=(2x-3)^2$	+	۰	+

پ) $C=x^3(7-x)$

x		۰		۷	
x^3	−	۰	+		+
$7-x$	+		+	۰	−
C	−	۰	+	۰	−

ت) $D=\frac{x-1}{5-2x}$

x		۱		$\frac{5}{2}$	
$x-1$	−	۰	+		+
$5-2x$	+		+	۰	−
D	−	۰	+	ت ن	−

۱ــ از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف‌نظر می‌کنیم.

۲ــ تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجهٔ مشابهی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{0}$ است، قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می‌گوییم. $(a\in\mathbb{R})$

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم

چند جمله‌ای درجه دوم $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ را در نظر می‌گیریم که در آن $a\,,b,c$ اعداد حقیقی‌اند و $a\neq ۰$ است. برای حل معادلهٔ $P(x)=۰$ به شیوهٔ مربع کامل، $P(x)$ را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم.

$$P(x)=a\left[(x+\frac{b}{۲a})^{۲}-\frac{\Delta}{۴a^{۲}}\right]$$

که در آن، $\Delta=b^{۲}-۴ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادلهٔ $P(x)=۰$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به‌دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ فرض کنید که معادلهٔ $P(x)=۰$، دو ریشه متمایز $x_۱$ و $x_۲$ ($x_۱<x_۲$) داشته و به شکل $P(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.

x		$x_۱$		$x_۲$	
$x-x_۱$	−	۰	+		+
$x-x_۲$	−		−	۰	+
$(x-x_۱)(x-x_۲)$	+		−		+
$P(x)$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

۲ اگر معادلهٔ $P(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف برابر با $x_۱$ داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x)=a(x-x_۱)^{۲}$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.

x		$x_۱$	
$(x-x_۱)^{۲}$	+	۰	+
$P(x)$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳ اکنون فرض کنید $\Delta<۰$ باشد، در این صورت معادلهٔ $P(x)=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x)=a\left[(x+\frac{b}{۲a})^{۲}-\frac{\Delta}{۴a^{۲}}\right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x\in\mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$، مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ $a>۰$, $\Delta<۰$

برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید. $a<۰$, $\Delta<۰$

مثال

عبارت $A = ۲x^۲ - x - ۳$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $A = ۰$ را در صورت وجود، به‌دست می‌آوریم.

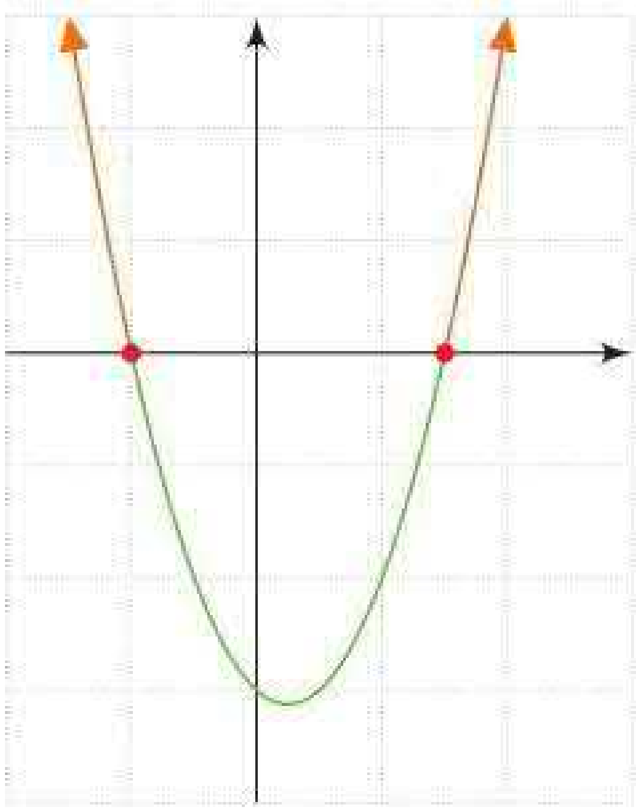
$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۱ + ۲۴ = ۲۵$$

پس معادلهٔ $A = ۰$ دو ریشهٔ متمایز به‌صورت زیر دارد:

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱+۵}{۴} = \frac{۳}{۲} \qquad , \qquad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱-۵}{۴} = -۱$$

با توجه به اینکه $a = ۲$ است، بنابراین علامت $P(x)$ طبق فعالیت بالا به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

x		-۱		$\frac{۳}{۲}$	
P(x)	+	۰	−	۰	+



نمودار سهمی $y = ۲x^۲ - x - ۳$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت y را برای xهای مختلف تعیین کرد. برای $x > \frac{۳}{۲}$ و $x < -۱$، نمودار بالای محور xهاست؛ پس y علامت مثبت دارد و برای $-۱ < x < \frac{۳}{۲}$، نمودار پایین محور xهاست؛ پس علامت y منفی است.

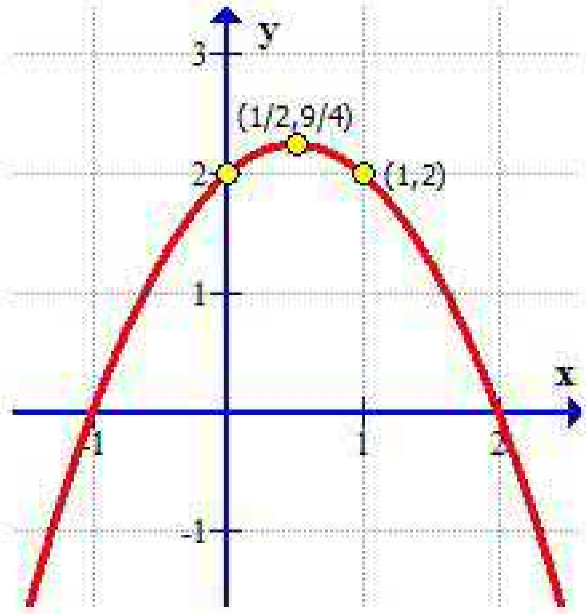
مثال

عبارت $P(x) = \frac{x(x-۳)^۲}{x^۲ + x - ۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هریک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

$$\begin{cases} x = ۰ \\ (x-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = -۲ \text{ یا } x = ۱ \end{cases}$$

x		-۲		۰		۱		۳	
x	−		−	۰	+		+		+
$(x-۳)^۲$	+		+		+		+	۰	+
$x^۲+x-۲$	+	۰	−		−	۰	+		+
P(x)	−		+	۰	−		+	۰	+
		تعریف نشده				تعریف نشده			



کار در کلاس

۱) چندجمله‌ای $y=-x^۲+x+۲$ را با محاسبهٔ ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

$-x^۲+x+۲=۰$

$\xrightarrow{\Delta=۹} x=۲, x=-۱$

x		-۱		۲	
y	-	۰	+	۰	-

۲) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(x^۲-۹)(۳x-۱)$

$x^۲-۹=۰ \Rightarrow x=\pm ۳$

$۳x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$

		-۳		$\frac{۱}{۳}$		۳	
$x^۲-۹$	+	۰	-		-	۰	+
$۳x-۱$	-		-	۰	+		+
A	-	۰	+	۰	-	۰	+

ب) $B=\frac{-x^۲+۶x-۹}{x^۲+x+۳}$

$-x^۲+۶x-۹=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} x=۳$

$x^۲+x+۳=۰ \xrightarrow{\Delta=-۱۱}$ جواب ندارد

		۳	
$-x^۲+۶x-۹$	-	۰	-
$x^۲+x+۳$	+		+
B	-	۰	-

نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به‌صورت زیرند :

می‌خوانیم	نامعادله
A کوچک‌تر از B است.	$A<B$
A کوچک‌تر یا مساوی B است.	$A\leq B$
A بزرگ‌تر از B است.	$A>B$
A بزرگ‌تر یا مساوی B است.	$A\geq B$

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم :

۱ــ خاصیت جمع :

برای عبارت‌های جبری A، B و C ، اگر $A<B$ سپس $A+C<B+C$.

۲ــ خاصیت ضرب

الف) اگر $C>۰$ و $A>B$ سپس $AC>BC$.

ب) اگر $C<۰$ و $A>B$ سپس $AC<BC$.

مثال

نامعادلهٔ $۵x-۱ \geq ۳x-۷$ را حل می‌کنیم.

$۵x-۱ \geq ۳x-۷$

به دو طرف نامعادله، $-۳x$ را اضافه می‌کنیم. $۵x-۱-۳x \geq ۳x-۷-۳x$

$۲x-۱ \geq -۷$

دو طرف نامعادله را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. $۲x \geq -۶$

$x \geq -۳$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in R \mid x \geq -۳\}$ که با نماد بازه به شکل $[-۳,+\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است:

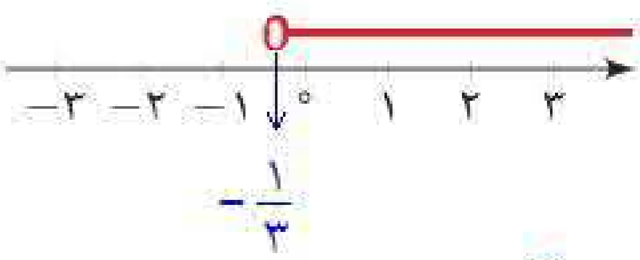
فعالیت

فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادلهٔ زیر صدق می‌کند:

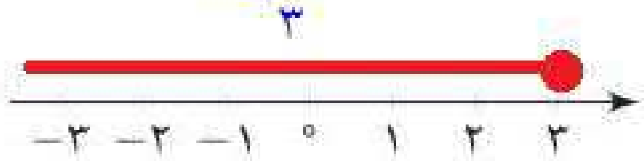
$$-۲ < ۳x-۱ \ , \ ۳x-۱ \leq ۸$$

۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به‌دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.

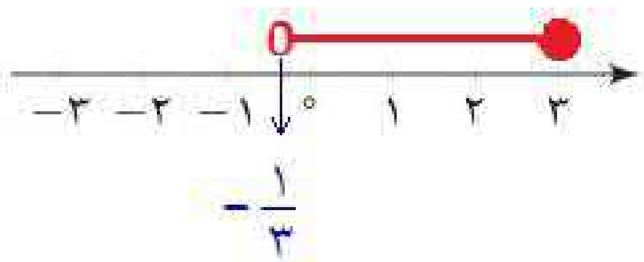
$-۲ < ۳x-۱ \xrightarrow{+۱} -۱ < ۳x \xrightarrow{\div ۳} -\frac{۱}{۳} < x$



$۳x-۱ \leq ۸ \xrightarrow{+۱} ۳x \leq ۹ \xrightarrow{\div ۳} x \leq ۳$



به‌خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به‌دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



۲ می‌توانیم دو نامعادلهٔ فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادلهٔ دوگانه به‌صورت $-۲ < ۳x-۱ \leq ۸$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادلهٔ دوگانه را حل کنید:

به دو نامعادله $+۱$ را اضافه می‌کنیم. $-۲ < ۳x-۱ \leq ۸$

دو نامعادله را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم. $-۱ < ۳x \leq ۹$

$-\frac{۱}{۳} < x \leq ۳$

جواب به‌دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

نامعادلهٔ دوگانهٔ فوق را به‌صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۳x-۱ > -۲ \\ ۳x-۱ \leq ۸ \end{cases}$$

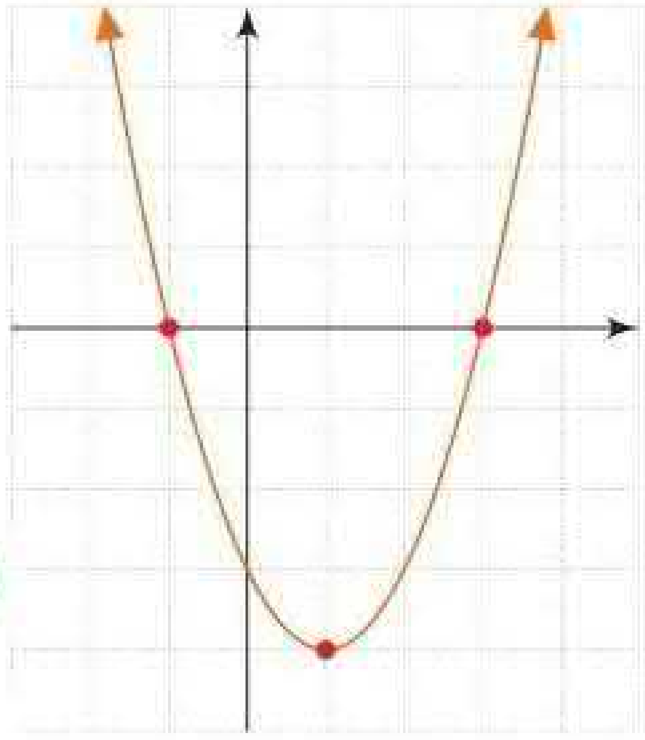
کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجهٔ فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به‌صورت $C=\frac{5}{9}(F-32)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $15 \le C \le 25$ ؛ سپس از رابطهٔ داده شده، C را برحسب F بنویسید و نامعادلهٔ دوگانهٔ به‌دست آمده را حل کنید.)

$15 \le C \le 25 \Rightarrow 15 \le \frac{5}{9}(F-32) \le 25 \xrightarrow{\times\frac{9}{5}} 27 \le F-32 \le 45 \xrightarrow{+32} 59 \le F \le 77$

فعالیت

سهمی $y=x^2-2x-3$ را درنظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.



الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور xهاست؟ $-1<x<3$

ب) جدول تعیین علامت عبارت $y=x^2-2x-3$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=3 \quad , \quad x=-1$

x		-1		3	
y	+	0	−	0	+

به ازای $-1<x<3$ ، y منفی است.

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به‌دست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادلهٔ $x^2-2x-3<0$ استفاده کرد.

$x^2-2x-3<0$ یعنی مجموعه مقادیری از x که به ازای آنها $y<0$ باشد که با توجه به نمودار $-1<x<3$ مشخص شده است. همچنین به کمک جدول تعیین علامت نیز به همین جواب رسیدیم.

کار در کلاس

هریک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^2 \le 4$

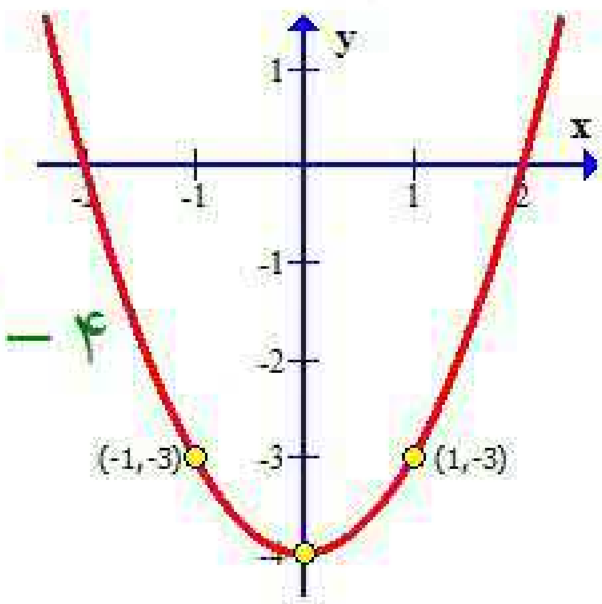
$x^2-4 \le 0 \Leftarrow x^2 \le 4$

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

x		-2		2	
y	+	0	−	0	+

$\Rightarrow -2 \le x \le 2$

$y=x^2-4$



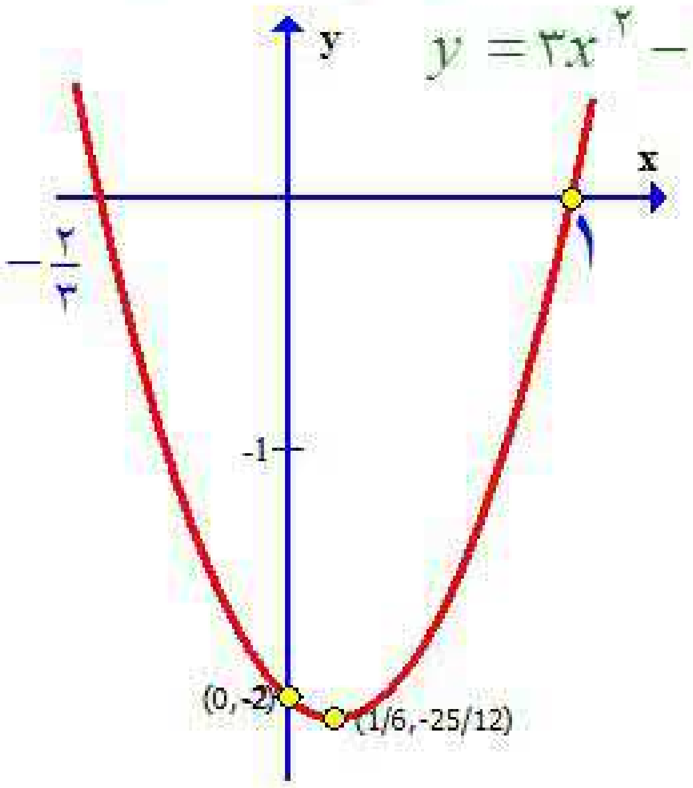
ب) $3x^2-x-2 \ge 0$

$3x^2-x-2=0 \xrightarrow{\Delta=25} x=1 \text{ ، } x=-\frac{2}{3}$

x		$-\frac{2}{3}$		1	
y	+	0	−	0	+

$\Rightarrow \left(-\infty,-\frac{2}{3}\right] \cup [1,+\infty)$

$y=3x^2-x-2$



مثال

برای چه مقادیری از m، عبارت $y=x^2+mx+1$ همواره مثبت است؟

حل : از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره مقدار مثبت داشته باشد، باید $\Delta<0$ و $a>0$ باشد. در این عبارت، $a=1$ و $\Delta=m^2-4$ است؛ بنابراین $m^2-4<0$ است.

جدول تعیین علامت، برای m^2-4 به‌صورت زیر است :

m		−۲		۲	
m^2-4	+	۰	−	۰	+

بنابراین برای اینکه m^2-4 منفی باشد، باید $-2<m<2$.

مثال

نامعادلهٔ $\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}\geq ۰$ را حل می‌کنیم.

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای این کار ریشه های صورت و مخرج این کسر را پیدا می‌کنیم. ریشه‌های معادله $x^{۲}-۹=۰$ ، اعداد ±۳ هستند و ریشهٔ معادله $۲x+۱=۰$ ، عدد $-\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x		-۳		$-\frac{۱}{۲}$		۳	
$x^{۲}-۹$	+	۰	−		−	۰	+
$۲x+۱$	−		−	۰	+		+
$\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}$	−	۰	+		−	۰	+

تعریف نشده

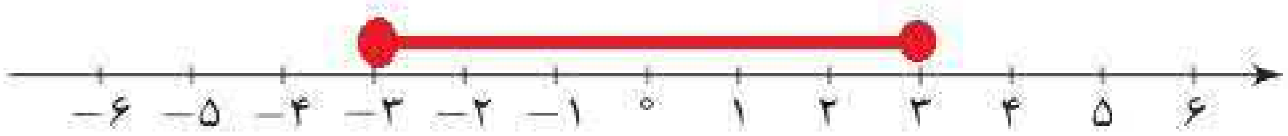
بنابراین اگر $-۳\leq x<-\frac{۱}{۲}$ و یا $x\geq ۳$، عبارت $\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت‌است از : $[-۳,-\frac{۱}{۲})\cup[۳,+\infty)$.

نامعادله‌های قدر مطلقی

می‌دانیم که $|x|$ همان فاصلهٔ x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $|۳|=۳$ و $|-۳|=۳$ زیرا فاصلهٔ هردو عدد ۳ و ۳− از مبدأ برابر ۳ است.

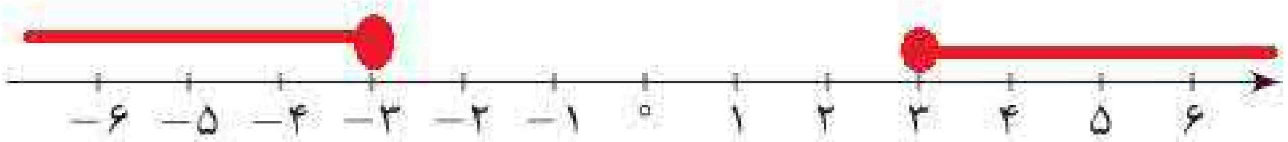
فعالیت

۱ نامعادلهٔ $|x|\leq ۳$ رادرنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعهٔ مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید. $[-۳,۳]$

۲ نامعادلهٔ $|x|\geq ۳$ را درنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعهٔ این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید. $(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید.

$|x| \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳ \Rightarrow$ مجموعه جواب (به شکل بازه) = $[-۳,۳]$

$|x| \geq ۳ \Rightarrow x \geq ۳$ یا $x \leq -۳ \Rightarrow$ مجموعه جواب (به شکل بازه) = $(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$

> فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت[1]
>
> ۱ــ اگر $|u| \leq a$ سپس $-a \leq u \leq a$.
>
> ۲ــ اگر $|u| \geq a$ سپس $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.

الف $|x-۳| \leq ۲$

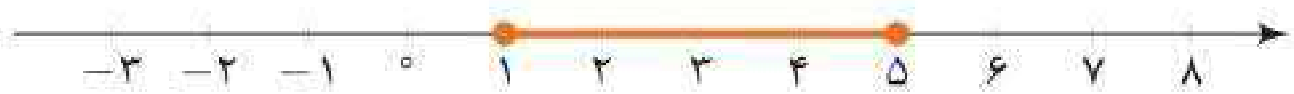
ب $|۲x-۱| > ۵$

برای حل نامعادلهٔ الف ، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادلهٔ دوگانه تبدیل می کنیم : $-۲ \leq x-۳ \leq ۲$

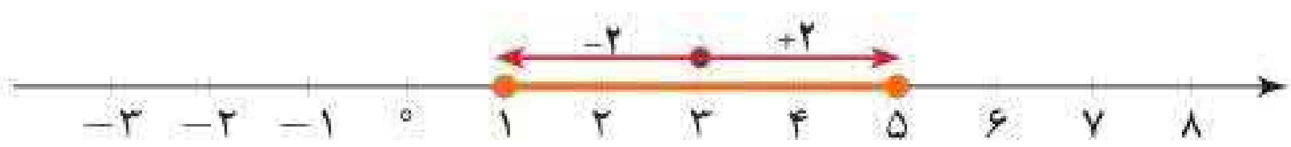
اکنون داریم :

$$-۲ \leq x-۳ \leq ۲ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۵.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازهٔ $[۱,۵]$ است و نمایش هندسی آن به‌صورت زیر است.



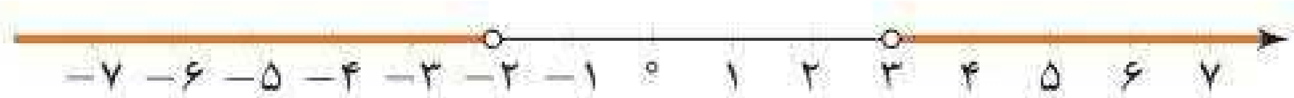
برای حل نامعادلهٔ $|x-۳| \leq ۲$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[۱,۵]$، مطابق شکل زیر به‌دست می‌آید.



برای حل نامعادلهٔ ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم :

$$|۲x-۱| > ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱ > ۵ \Rightarrow ۲x > ۶ \Rightarrow x > ۳ \\ ۲x-۱ < -۵ \Rightarrow ۲x < -۴ \Rightarrow x < -۲ \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت‌است از : $(-\infty,-۲)\cup(۳,+\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱ــ در هریک از این نامعادله‌ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

کار در کلاس

۱) در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به‌دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left|\frac{x}{3}+1\right| < \frac{2}{3}$

$$-\frac{2}{3} < \frac{x}{3}+1 < \frac{2}{3} \xrightarrow{-1} -\frac{5}{3} < \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3}$$

$$-5 < x < -1 \Rightarrow (-5,-1)$$

ب) $|5-2x| \geq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5-2x \geq 1 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq 2 \\ 5-2x \leq -1 \Rightarrow -2x \leq -6 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\infty,2] \cup [3,+\infty)$$

۲) یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازهٔ $(1,9)$ باشد.

با توجه به این که ۵ وسط بازه ی $(1,9)$ است ، این بازه مجموعه نقاطی است که فاصله شان از ۵ کمتر از ۴ می باشد بنابراین $|x-5| < 4$ جواب است .

توجه : در حالت کلی، بازه (a,b) را می توان به صورت $\left|x-\frac{b+a}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$ نوشت .

۳) یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty,3] \cup [6,+\infty)$ باشد.

با توجه به این که $\frac{9}{2}$ وسط فاصله $[3,6]$ است ، شکل مجموعه نقاطی است که فاصله شان از $\frac{9}{2}$ بیشتر از $\frac{3}{2}$ می باشد بنابراین $\left|x-\frac{9}{2}\right| \geq \frac{3}{2}$ جواب است .

توجه : در حالت کلی، مجموعه $(-\infty,a) \cup (b,+\infty)$ را می توان به صورت $\left|x-\frac{b+a}{2}\right| \geq \frac{b-a}{2}$ نوشت .

تمرین

۱) در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1 < 2x-3 \leq 3$

$$\xrightarrow{+3} 4 < 2x \leq 6 \xrightarrow{\div 2} 2 < x \leq 3 \Rightarrow (2,3]$$

ب) $x+1 \leq 5-x < 2x+3$

$$\begin{cases} x+1 \leq 5-x \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \\ 5-x < 2x+3 \Rightarrow -3x < -2 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \left(\frac{2}{3}, 2\right]$$

پ) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$

$$\xrightarrow{\times 2} -4 < 5-x < 0 \xrightarrow{-5} -9 < -x < -5 \xrightarrow{\times(-)} 9 > x > 5 \Rightarrow (5,9)$$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

$$x = 2 \Leftarrow 4-2x = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \Leftarrow 3x+1 = 0$$

	$-\frac{1}{3}$		2	
$4-2x$	$+$	$+$	0	$-$
$3x+1$	$-$	0 $+$		$+$
کسر	$-$	ت ن $+$	0	$-$

مجموعه جواب $= \left(-\frac{1}{3}, 2\right]$

ث) $x(x^2+4) < 0$

$x = 0 \quad , x^2+4 = 0 \Rightarrow$ جواب ندارد

		0	
x	$-$	0	$+$
x^2+4	$+$		$+$
عبارت	$-$	0	$+$

مجموعه جواب $= (-\infty, 0)$

ج) $\frac{x^3-x}{x^2-2x+2} \leq 0 \Leftarrow \frac{x(x^2-1)}{x^2-2x+2} \leq 0$

$$x = 0$$

$$x^2-1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2-2x+2 = 0$$

$\xrightarrow{\Delta=-4}$ جواب ندارد

		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+2	$+$		$+$		$+$		$+$
کسر	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

مجموعه جواب $= (-\infty,-1] \cup [0,1]$

چ) $|7-2x| < 1$

$$-1 < 7-2x < 1 \xrightarrow{-7} -8 < -2x < -6$$

$\xrightarrow{\div -2} 4 > x > 3 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (3,4)$

ح) $\left|\frac{x-1}{2}-1\right| \geq 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2}-1 \geq 3 \xrightarrow{+1} \frac{x-1}{2} \geq 4 \xrightarrow{\times 2} x-1 \geq 8 \xrightarrow{+1} x \geq 9 \\ \frac{x-1}{2}-1 \leq -3 \xrightarrow{+1} \frac{x-1}{2} \leq -2 \xrightarrow{\times 2} x-1 \leq -4 \xrightarrow{+1} x \leq -3 \end{cases}$$

مجموعه جواب $= (-\infty,-3] \cup [9,+\infty)$

۲ به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A=x^{2}+3x+k$ همواره مثبت است؟

با توجه به مثبت بودن a کافیست دلتا منفی باشد

$$\Delta<0 \Rightarrow 9-4k<0 \Rightarrow -4k<-9 \Rightarrow k>\frac{9}{4}$$

۳ به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y=mx^{2}-mx-1$ همواره پایین محور xهاست؟

از فرض سوال نتیجه می شود که باید عبارت همواره منفی باشد پس باید دلتا منفی و a منفی باشند .

$$\Delta<0 \Rightarrow m^{2}+4m<0$$

		-4		0	
$m^{2}+4m$	+	0	-	0	+

$\Rightarrow -4<m<0$

$m<0$ ؛ از طرفی a منفی باشد

$\Rightarrow -4<m<0$

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h=-5t^{2}+18t+13$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

$$h>13 \Rightarrow -5t^{2}+18t+13>13 \Rightarrow -5t^{2}+18t>0$$

		0		$\frac{18}{5}$	
$-5t^{2}+18t$	−	0	+	0	−

$\Rightarrow (0,\frac{18}{5})$

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y=\frac{15}{8}x^{2}-30x+200$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده قابل قبول‌اند؟

$$\Rightarrow \frac{15}{8}x^{2}-30x+200>110 \Rightarrow \frac{15}{8}x^{2}-30x+90>0 \xrightarrow{\times 8} 15x^{2}-240x+720>0$$

$$15x^{2}-240x+720=0 \xrightarrow{\Delta=14400} x=12\,,\ x=4$$

		4		12	
$15x^{2}-240x+720$	+	0	-	0	+

$\Rightarrow x<4$ یا $x>12$

از بین جواب های بدست آمده آنهایی که مثبت هستند قابل قبول اند . واضح هست که جواب های صفر و منفی قابل قبول نیستند